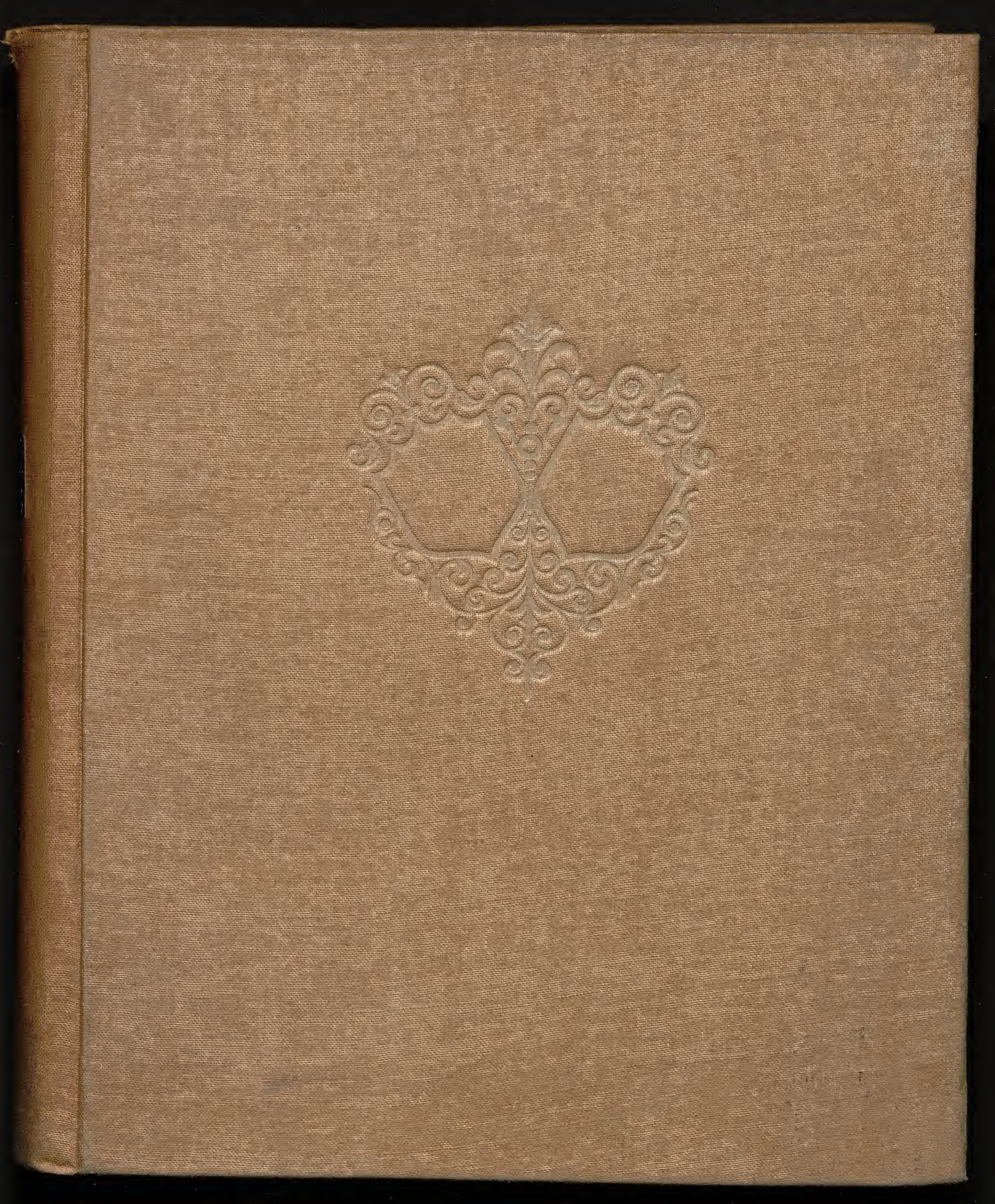

colorchecker CLASSIC
x·rite
mm






M. DU NORD
LONDRES
ANGLETERRE
PAYS-BAS
Pas de Calais
BELGIQUE
BRUXELLES
ALLEMAGNE
LA MANCHE
PAS-DE-CALAIS
Lille
Arras
NORD
SOMME
Amiens
I. de Guernesey
Iles Normandes (Angl.)
I. de Jersey
Baie de la Seine
SEINE-INFÉRE
Rouen
OISE
Beauvais
Laon
AISNE
Mezières
ARDENNES
St Lô
Caen
MANCHE
CALVADOS
EURE
Evreux
SEINE
PARIS
Versailles
SEINE-ET-OISE
SEINE-ET-MARNE
Melun
Châlons-s-Marne
MARNE
MEUSE
MEURTHE-ET-MOSELLE
Metz
LORRAINE
Nancy
Strasbourg
Bar-le-Duc
ALSACE
Golfe de St Malo
I. d'Ouessant
St Brieuc
CÔTES-DU-NORD
FINISTÈRE
Quimper
ILLE-ET-VILAINE
Rennes
MAYENNE
Laval
ORNE
Alençon
Chartres
EURE-ET-LOIR
le Mans
SARTHE
AUBE
Troyes
HAUTE-MARNE
Chaumont
VOSGES
Epinal
MORBIHAN
Vannes
Orléans
LOIRET
YONNE
Auxerre
LOIR-ET-CHER
Blois
Vesoul
HAUTE-SAÔNE
Belfort
Belle-Ile
LOIRE-INFÉRRE
Loire
Angers
INDRE-ET-LOIRE
Tours
MAINE-ET-LOIRE
Nantes
CÔTE-D'OR
Dijon
Besançon
DOUBS
BERNE
I. de Noirmoutier
CHER
Bourges
NIÈVRE
Nevers
Châteauroux
Ile d'Yeu
La Roche-s-Yon
VENDÉE
DEUX-SÈVRES
Poitiers
VIENNE
INDRE
SUISSE
Lons-le-Saulnier
JURA
OCÉAN
Moulins
ALLIER
SAÔNE-ET-LOIRE
Mâcon
Bourg
AIN
Ile de Ré
Niort
I. d'Oléron
La Rochelle
CHARENTE-INFRE
Guéret
CREUSE
HAUTE-VIENNE
Limoges
CHARENTE
Angoulême
Clermont-Ferrand
PUY-DE-DÔME
LOIRE
RHÔNE
Lyon
St Etienne
HTE SAVOIE
Annecy
Chambéry
SAVOIE
ATLANTIQUE
Gironde
Périgueux
CORRÈZE
Tulle
CANTAL
HTE LOIRE
Le Puy
ISÈRE
Grenoble
ITALIE
DORDOGNE
Bordeaux
Aurillac
Valence
Privas
ARDÈCHE
HAUTES-ALPES
GIRONDE
LOT
Mende
DRÔME
Gap
LOT-ET-GARONNE
Cahors
Rodez
LOZÈRE
Agen
TARN-ET-GARONNE
AVEYRON
Golfe de Gascogne
LANDES
Mont-de-Marsan
Montauban
Albi
GARD
VAUCLUSE
Digne
BASSES-ALPES
ALPES-MARITIMES
GERS
Auch
TARN
Toulouse
Nîmes
Avignon
Montpellier
HÉRAULT
BOUCHES-DU-RHÔNE
VAR
Nice
Draguignan
BASSES-PYRÉNÉES
Pau
Tarbes
HAUTES-PYRÉNÉES
HAUTE-GARONNE
Carcassonne
AUDE
Marseille
ARIÈGE
Foix
Golfe du Lion
Perpignan
PYRÉNÉES-ORLES
CORSE
Ajaccio
ESPAGNE
MER
MÉDITERRANÉE
Echelle de 1: 6.000.000
0 50 100 150 200 Kil.
Gravé par Erhard Fres
H & Cie

TABLEAU DES 86 DÉPARTEMENTS

ET DES 362 ARRONDISSEMENTS (SANS L'ALGÉRIE)

(Les chefs-lieux de département dans la seconde colonne sont en PETITES CAPITALES. Les sous-préfectures, en romain ordinaire, et les lieux remarquables, autres que les chefs-lieux d'arrondissement, en *italique*)

DÉPARTEMENTS	ARRONDISSEMENTS
AIN	BOURG, Belley, Gex, Nantua, Trévoux.
AISNE	LAON, Château-Thierry, Saint-Quentin, Soissons, Vervins, *Chauny*.
ALLIER	MOULINS, Gannat, La Palisse, Montluçon, *Vichy*.
ALPES (BASSES-)	DIGNE, Barcelonette, Castellane, Forcalquier, Sisteron, *Manosque*.
ALPES (HAUTES-)	GAP, Briançon, Embrun.
ALPES-MARITIMES	NICE, Grasse, Puget-Théniers, *Menton*.
ARDÈCHE	PRIVAS, Largentière, Tournon, *Annonay*.
ARDENNES	MÉZIÈRES, Rethel, Rocroy, Sedan, Vouziers, *Charleville*.
ARIÉGE	FOIX, Pamiers, Saint-Girons.
AUBE	TROYES, Arcis-sur-Aube, Bar-sur-Aube, Bar-sur-Seine, Nogent-sur-Seine.
AUDE	CARCASSONNE, Castelnaudary, Limoux, Narbonne.
AVEYRON	RODEZ, Espalion, Milhau, Saint-Affrique, Villefranche.
BOUCHES-DU-RHÔNE	MARSEILLE, Aix, Arles, *Tarascon*.
CALVADOS	CAEN, Bayeux, Falaise, Lisieux, Pont-l'Évêque, Vire, *Honfleur*.
CANTAL	AURILLAC, Mauriac, Murat, Saint-Flour.
CHARENTE	ANGOULÊME, Barbezieux, Cognac, Confolens, Ruffec.
CHARENTE-INFÉRIEURE	LA ROCHELLE, Jonzac, Marennes, Rochefort, Saintes, Saint-Jean-d'Angély.
CHER	BOURGES, Saint-Amand, Sancerre, *Vierzon*.
CORRÈZE	TULLE, Brives, Ussel.
CORSE	AJACCIO, Bastia, Calvi, Sartène.
CÔTE-D'OR	DIJON, Beaune, Châtillon-sur-Seine, Semur, *Auxonne*.
CÔTES-DU-NORD	SAINT-BRIEUC, Dinan, Guingamp, Lannion, Loudéac, *Tréguier*.
CREUSE	GUÉRET, Aubusson, Bourganeuf, Boussac.
DORDOGNE	PÉRIGUEUX, Bergerac, Nontron, Ribérac, Sarlat.
DOUBS	BESANÇON, Baume-les-Dames, Montbéliard, Pontarlier.
DRÔME	VALENCE, Die, Montélimart, Nyons.
EURE	EVREUX, Les Andelys, Bernay, Louviers, Pont-Audemer.
EURE-ET-LOIR	CHARTRES, Châteaudun, Dreux, Nogent-le-Rotrou, *Maintenon*.
FINISTERRE	QUIMPER, Brest, Châteaulin, Morlaix, Quimperlé.
GARD	NIMES, Alais, Uzès, Le Vigan, *Beaucaire*.
GARONNE (HAUTE-)	TOULOUSE, Muret, Saint-Gaudens, Villefranche, *Bagnères-de-Luchon*.
GERS	AUCH, Condom, Lectoure, Lombez, Mirande.
GIRONDE	BORDEAUX, Bazas, Blaye, La Réole, Lesparre, Libourne.
HÉRAULT	MONTPELLIER, Béziers, Lodève, Saint-Pons, *Cette*.
ILLE-ET-VILAINE	RENNES, Fougères, Montfort, Redon, Saint-Malo, Vitré, *Saint-Servan*.
INDRE	CHATEAUROUX, Le Blanc, Issoudun, La Châtre.
INDRE-ET-LOIRE	TOURS, Chinon, Loches.
ISÈRE	GRENOBLE, La Tour-du-Pin, Saint-Marcellin, Vienne.
JURA	LONS-LE-SAUNIER, Dôle, Poligny, Saint-Claude, *Salins*.
LANDES	MONT-DE-MARSAN, Dax, Saint-Sever.
LOIR-ET-CHER	BLOIS, Romorantin, Vendôme
LOIRE	SAINT-ETIENNE, Montbrison, Roanne, *Rive-de-Gier*, *Saint-Chamond*.
LOIRE (HAUTE-)	LE PUY, Brioude, Yssingeaux.
LOIRE-INFÉRIEURE	NANTES, Anceuis, Châteaubriant, Paimbœuf, Saint-Nazaire, *Savenay*.
LOIRET	ORLÉANS, Gien, Montargis, Pithiviers, *Beaugency*.
LOT	CAHORS, Figeac, Gourdon.
LOT-ET-GARONNE	AGEN, Marmande, Nerac, Villeneuve.
LOZÈRE	MENDE, Florac, Marvejols.
MAINE-ET LOIRE	ANGERS, Baugé, Cholet, Saumur, Segré.
MANCHE	SAINT-LÔ, Avranches, Cherbourg, Coutances, Mortain, Valognes, *Granville*.
MARNE	CHALONS, Epernay, Reims, Sainte-Menehould, Vitry-le-François.
MARNE (HAUTE-)	CHAUMONT, Langres, Vassy.
MAYENNE	LAVAL, Château-Gontier, Mayenne.
MEURTHE-ET-MOSELLE	NANCY, Briey, Luneville, Toul (Château-Salins et Sarrebourg, du département de la Meurthe, cédés à l'Allemagne).
MEUSE	BAR-LE-DUC, Commercy, Montmédy, Verdun.
MORBIHAN	VANNES, Lorient, Ploermel, Pontivy.
(MOSELLE, ancien départem..	Partie cédée à l'Allemagne : Metz, Sarreguemines, Thionville.)
NIÈVRE	NEVERS, Château-Chinon, Clamecy, Cosne.
NORD	LILLE, Avesnes, Cambrai, Douai, Dunkerque, Hazebrouck, Valenciennes.
OISE	BEAUVAIS, Clermont, Compiègne, Senlis.
ORNE	ALENÇON, Argentan, Domfront, Mortagne, *Laigle*.
PAS-DE-CALAIS	ARRAS, Béthune, Boulogne, Montreuil, Saint-Omer, Saint-Pol, *Calais*.
PUY-DE-DÔME	CLERMONT-FERRAND, Ambert, Issoire, Riom, Thiers.
PYRÉNÉES (BASSES-)	PAU, Bayonne, Mauléon, Oloron, Orthez.
PYRÉNÉES (HAUTES-)	TARBES, Argelès, Bagnères.
PYRÉNÉES-ORIENTALES	PERPIGNAN, Céret, Prades, *Collioure*.
(BAS-RHIN, ancien départem.	Tous les arrondissements cédés : Strasbourg, Saverne, Schlestadt, Wissembourg.)
(HAUT-RHIN, ancien départ..	Arrondissements cédés : Colmar, Mulhouse.) Belfort, chef-lieu d'arrondissement, laissé à la France.
RHÔNE	LYON, Villefranche, *Tarare*.
SAÔNE (HAUTE-)	VESOUL, Cray, Lure.
SAÔNE-ET-LOIRE	MACON, Autun, Châlon, Charolles, Louhans, *Le Creusot*.
SARTHE	LE MANS, La Flèche, Mamers, Saint-Calais.
SAVOIE	CHAMBÉRY, Albertville, Moutiers, Saint-Jean-de-Maurienne, *Aix-les-Bains*.
SAVOIE (HAUTE-)	ANNECY, Bonneville, Saint-Julien, Thonon.
SEINE	PARIS, Saint-Denis, Sceaux, *Boulogne-sur-Seine*, *Neuilly-sur-Seine*, *Clichy-la-Garenne*, *Vincennes*, *Charenton*.
SEINE-ET-MARNE	MELUN, Coulommiers, Fontainebleau, Meaux, Provins, *Montereau*.
SEINE-ET-OISE	VERSAILLES, Corbeil, Etampes, Mantes, Pontoise, Rambouillet, *Sèvres*, *Saint-Cloud*, *Saint-Germain*.
SEINE-INFÉRIEURE	ROUEN, Dieppe, Le Havre, Neufchâtel, Yvetot, *Fécamp*, *Elbeuf*.
SÈVRES (DEUX-)	NIORT, Bressuire, Melle, Parthenay.
SOMME	AMIENS, Abbeville, Doulens, Montdidier, Péronne, *Saint-Valéry-sur-Somme*
TARN	ALBY, Castres, Gaillac, Lavaur, *Mazamet*.
TARN-ET-GARONNE	MONTAUBAN, Castel-Sarrasin, Moissac.
VAR	DRAGUIGNAN, Brignoles, Toulon, *Hyères*.
VAUCLUSE	AVIGNON, Apt, Carpentras, Orange.
VENDÉE	NAPOLÉON-VENDÉE, Fontenay-le-Comte, Les Sables-d'Olonne
VIENNE	POITIERS, Châtellerault, Civray, Loudun, Montmorillon.
VIENNE (HAUTE-)	LIMOGES, Bellac, Rochechouart, Saint-Yrieix.
VOSGES	EPINAL, Mirecourt, Neufchâteau, Remiremont, Saint-Dié, *Plombières*.
YONNE	AUXERRE, Avallon, Joigny, Sens, Tonnerre.

Paris. — Impr. Vieville et Capiomont, rue des Poitevins, 6.

Faculté des Sciences.
1896 – 1897.

Cours de M. Bouty.

Électricité et Magnétisme
(moins l'Électro-Chimie)

Louis Couturat

3, rue Soufflot.



Première leçon

Notions préliminaires.

L'énergie est la faculté de produire un travail mécanique.

L'énergie revêt des formes très variées. Par exemple, soit un mobile de masse m, animé d'une vitesse v : sa force vive est mv^2. Il peut produire un travail, par ex. soulever un poids p à une hauteur h ; ce travail sera mesuré par ph. On constate d'autre part que ce travail est égal à sa demi-force vive :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} mv^2.$$

Cette espèce de énergie, due à la vitesse acquise, s'appelle énergie cinétique.

Un autre mode d'énergie est l'énergie potentielle. Un ressort bandé peut produire du travail en se détendant, par ex. soulever un poids. Tous les corps élastiques possèdent une telle énergie ; tel est un gaz comprimé par un piston, dans un cylindre ; il soulèvera en se détendant les poids dont on charge le piston.

La chaleur peut communiquer à un corps de l'énergie potentielle. Si l'on fixe le piston dans une position

d'équilibre, et qu'on chauffe le gaz, sa pression augmente (devient supérieure à la pression atmosphérique); si l'on dégage le piston, le gaz le soulèvera avec les poids qui le chargent.

On sait qu'il existe une relation entre la chaleur communiquée au corps et le travail qu'il produit. Il faut en préciser les conditions. Soit un phénomène dans lequel un système de corps se trouve isolé: ces corps peuvent recevoir ou donner de la chaleur, produire ou consommer du travail. Quand le système sera revenu à son état initial, il y aura un rapport constant entre le travail produit et la chaleur absorbée.

Exemple: expérience de Joule. Soit $\mathcal{T}$ le travail produit par les poids en tombant; soit Q la quantité de chaleur acquise par le calorimètre: le rapport $\frac{\mathcal{T}}{Q}$ est constant:

$$\mathcal{T} = E_1 Q$$

E_1 est l'équivalent mécanique de la calorie (ou de la chaleur.) Dans l'ancien système (kilogrammètre, grande calorie) $E_1 = 425$. Dans le système C.G.S, (erg, petite calorie): $E = 4,17 \times 10^7$.

Le frottement est un moyen de transformer d'une manière continue le travail en chaleur. Expérience de Tyndall.

Parmi les énergies potentielles se rangent les énergies chimiques, par ex celle de la poudre à canon. Elle est capable de effectuer un travail en chassant le projectile, et son énergie se transforme en force vive.

Les formes précédentes de l'énergie paraissent localisées dans les corps (ressort bandé, poudre à canon) de telle sorte qu'ils la transportent partout avec eux.

Voici une autre espèce d'énergie potentielle, toute différente. Considérons un rayon de soleil (à la fois lumineux et chaud) qui parcourt 300.000 kilom. par seconde (sa vitesse C G S est de 3.10^{10} centim.) La chaleur solaire peut être emmagasinée par une chaudière à vapeur, par les végétaux, etc. et produire ainsi du travail. La lumière solaire peut effectuer un travail chimique (photographie) équivalent en fin de compte à un travail mécanique. Supposons le soleil anéanti en ce moment; la terre recevra encore son énergie pendant 8 min. 30 sec. Où est l'énergie solaire pendant ce temps? Dans le vide. Un cylindre de 3.10^{10} centim. de hauteur contient l'énergie que recevra sa surface de base pendant 1 seconde. C'est de l'énergie qui voyage.

Pour expliquer ce mystère, ou plutôt pour ramener

ce phénomène à un fait connu, on a imaginé un fluide qui remplirait le vide : l'éther lumineux, et on lui a attribué précisément l'élasticité nécessaire pour expliquer la transmission de la lumière, comme l'élasticité de l'air explique la transmission du son. L'éther n'est donc rien de réel ; c'est une fiction destinée à assimiler un fait inconnu à un fait connu et à l'expliquer d'une manière analogue.

Principe de la conservation de l'énergie.

On a vu que le travail est dans un rapport constant avec la force vive : $F = mv^2$

$$\frac{C}{F} = \frac{1}{2}.$$

et dans un autre rapport constant avec la chaleur :

$$\frac{C}{Q} = 425.$$

On a généralisé ces relations entre diverses formes de l'énergie, et posé en principe (hypothétique) que, si une certaine quantité d'énergie disparaît sous une forme, elle doit reparaître sous une autre.

Ce principe n'a rien d'obscur : puisque toute énergie est une puissance de travail et se manifeste par un travail mécanique, elle doit se mesurer par le travail produit. C'est le travail qui assure l'équivalence des différentes formes de l'énergie. Ainsi

les transformations du travail en force vive, en chaleur, etc. ne sont que des cas particuliers de ce principe.

Ce principe est une vérité expérimentale, c.à.d. une affirmation à laquelle certains faits ont donné naissance, qu'on a généralisée, et qui n'a été démentie jusqu'ici par aucun autre fait. Mais elle est à la merci d'une expérience contraire, fort peu probable d'ailleurs.

Revue et classification des phénomènes électriques et magnétiques.

1° Il y a d'abord les phénomènes magnétiques bien connus: l'aimant attire la limaille de fer. Il effectue donc un travail mécanique. Mais il ne peut en porter qu'une certaine quantité: quand il est saturé, il n'en attire plus. Il n'est donc capable que d'un travail fini, son énergie potentielle s'épuise comme celle d'un ressort détendu. Si l'on dépouille l'aimant de la limaille qui s'y attache, on lui rend son énergie, comme quand on tend le ressort. (en effectuant un travail contraire)

D'autre part, les aimants exercent les uns sur les autres des attractions et des répulsions: aiguille aimantée. C'est une autre espèce de phénomènes magnétiques.

~~2e Phéno~~ Il y a d'autres phénomènes magnétiques, bien plus curieux ! Si l'on fait tourner un disque de cuivre (corps non magnétique, que l'aimant n'attire pas) entre les pôles d'un aimant (électro-aimant) il s'arrête, et l'on ne peut le faire tourner qu'avec difficulté (expérience de Foucault.) Il y a donc destruction de force vive (presque instantanée) et par suite travail. En compensation, on constate un échauffement du disque. Quand le système est revenu à l'état primitif, on doit trouver l'équivalence du travail et de la chaleur. M. Violle fait mouvoir l'appareil par des poids dont il mesure la hauteur de chute, et plonge brusquement le disque de cuivre dans un calorimètre. Il a ainsi trouvé pour l'équivalent mécanique de la chaleur le nombre 435 (trop fort, à cause des pertes de chaleur.)

Cette expérience est analogue à celle de Tyndall : l'action de l'aimant est tout à fait semblable au frottement (qui n'est pas moins obscur au fond.) Ce n'est pas le frottement de l'air ; car le phénomène se produit aussi bien dans le vide. Il semble qu'il y ait un frottement du disque contre le vide, ou du moins les effets sont les mêmes (nous ne connaissons pas plus la nature du frottement dans un cas que dans l'autre.)

Sans doute, l'énergie d'un aimant semble localisée dans ce corps et l'accompagne dans ses déplacements. Mais on peut tout aussi bien se figurer l'attraction de l'aimant sur une molécule comme produite par un ressort qui serait tendu entre les deux. On localise ainsi l'énergie magnétique dans le milieu ambiant, en le concevant comme déformé par l'aimant à une certaine distance (Maxwell), et l'on s'explique aussi bien par là que l'aimant transporte partout son énergie. Comme l'énergie lumineuse et calorifique, l'énergie magnétique peut donc être localisée dans le vide, et s'expliquer comme elle par l'élasticité de l'éther.

2° Phénomènes électro-magnétiques.

Faisons maintenant tourner entre les pôles d'un aimant, au lieu du disque de cuivre, une bobine enroulée d'une certaine manière et formant un circuit dans lequel est intercalée une lampe à incandescence. C'est pour ainsi dire le disque de Foucault qu'on a étiré en fil, et dont une partie est éloignée de l'aimant (Machine magnéto-électrique de Gramme). Dans ce cas la chaleur développée tout le long du fil produit de la lumière en faisant rougir le fil de la lampe.

Cette chaleur n'est pas produite par conductibilité : la lampe peut être à des kilomètres de l'aimant ; d'ailleurs la chaleur se produit simultanément et également dans toutes les parties du fil ; la lumière apparaît et disparaît instantanément.

On dit que ce fil est parcouru par un courant électrique, et la quantité de chaleur produite est censée mesurer l'intensité de ce courant. Cette expression de courant est une métaphore tirée de l'hydraulique (dans une canalisation d'eau, on peut tirer de l'eau d'un point quelconque) ; elle vient de l'hypothèse d'un fluide électrique. Pour nous, ce phénomène d'échauffement du fil est un cas particulier de la conservation de l'énergie.

Le courant électrique se manifeste par d'autres propriétés. Le fil doit être en métal (comme le disque de Foucault) c.à.d. en un corps conducteur, non en un corps isolant ou diélectrique, comme le soufre. Sont conducteurs non seulement les métaux, mais aussi les dissolutions de sels métalliques, que nous appellerons conducteurs électrolytiques. Dans ces conducteurs, il se produit une décomposition : par ex. l'eau acidulée du voltamètre se décompose en O

et H (celui-ci en volume double de celui-là.) En général, un conducteur électrolytique est composé d'un métal M (en particulier H) et d'un radical (acide) R; quand un courant le traverse, il se décompose, le métal d'un côté et le radical de l'autre: Exemple: KCl se décompose en K et en Cl.

L'analogie des effets calorifiques et chimiques du courant semble indiquer que la chaleur est un travail moléculaire, puisque dans un conducteur électrolytique la molécule est décomposée.

Un courant électrique produit d'autres effets en dehors des conducteurs: expérience d'Œrstedt. Le fil de cuivre, sans action sur l'aiguille aimantée, la fait dévier quand le courant y passe. C'est encore un phénomène électro-magnétique.

Si l'on met deux machines magnéto-électriques en communication, et si l'on fait tourner l'une, l'autre se met à tourner: c'est le même effet que dans l'expérience d'Œrstedt, mais plus compliqué. Une lampe intercalée dans le circuit ne rougit pas; mais si l'on arrête la seconde machine, elle rougit aussitôt.

Pour expliquer ce curieux phénomène, il faut remarquer que la cause du courant est le travail

mécanique dépensé à faire tourner la 1e machine : on l'appelle (improprement) force électromotrice. La 2e machine produit un travail inverse (le courant étant mobile par rapport à l'aimant fixe) Le travail est une force contre-électromotrice qui tend à affaiblir le courant ; c'est pourquoi la lampe ne rougit que quand la 2e machine est au repos. En somme la dépense de travail effectuée sur la 1e machine pour produire le courant se retrouve, tantôt sous forme de travail mécanique produit par la 2e machine, tantôt sous forme de chaleur et de lumière dans la lampe. Soient Q et Q' les quantités de chaleur reçues par la lampe dans les deux cas ; on a tour à tour :

$$\mathcal{C} = EQ \qquad \mathcal{C} = EQ' + \mathcal{C}'$$

donc

$$Q' = \frac{\mathcal{C} - \mathcal{C}'}{E} < Q = \frac{\mathcal{C}}{E}.$$

c'est pourquoi la lampe ne rougit pas.

3° Phénomènes électriques.

Soit un courant ; mettons 2 points éloignés A, B du circuit en communication avec deux plateaux métalliques très rapprochés M, M' formant ce qu'on nomme un condensateur. Quand le courant passe, les deux plateaux s'attirent ; si au contraire ils étaient reliés au même point du circuit, ils se repousseraient.

Ce sont des phénomènes d'un ordre nouveau (électrostatiques.)

Exemple : électromètre de Mascart (p. 175) : 4 quadrants creux, les deux opposés étant en communication, à l'intérieur desquels peut tourner une aiguille d'aluminium formée de deux secteurs opposés, suspendue à un fil (ou à deux.) Si l'on met les deux couples de quadrants en communication avec 2 points d'un circuit, l'aiguille sera attirée par les uns et repoussée par les autres. Si l'on renverse le courant, l'aiguille est déviée en sens inverse.

Dans ces phénomènes se produisent des courants temporaires, presque instantanés, suivant les fils AM, BM' ; ils disparaissent dès que les plateaux sont chargés.

Des 3 ordres de phénomènes que nous venons d'énumérer, les phén. électriques sont les plus anciennement connus, et les plus simples au point de vue de la représentation mathématique. Nous commencerons donc par les étudier.

2e leçon.

Electricité statique.

On connait l'électroscope condensateur inventé par Volta. On peut charger cet instrument au moyen d'une machine magnéto-électrique: on met les deux pôles de la machine en communication avec les 2 plateaux de l'électroscope, puis on enlève le plateau supérieur: on voit les feuilles diverger.

Toutes les fois qu'on pourra ainsi charger l'électroscope, on dira qu'on a une source électrique.

Une autre source est une lame double formée de cuivre et de zinc soudés bout à bout: on tient le zinc à la main, on touche le plateau inférieur avec le cuivre, et le plateau supérieur avec la main, pour le mettre en communication avec le sol, et par suite avec le zinc. On obtient le même effet, plus ou moins fort, avec d'autres métaux soudés. Ainsi deux métaux en contact constituent une source électrique.

Les corps isolants (diélectriques) ne deviennent sources électriques que si l'on assure le contact par le frottement, qui chasse l'air interposé. Mais ces sources sont bien plus fortes que les précédentes: aussi pour les manifester n'a-t-on pas besoin d'un appareil délicat et sensible

comme l'électroscope on emploie simplement un double pendule formés par deux boules de moelle de sureau suspendues à des fils de cocon; leur divergence révèle leur électrisation: car les corps électrisés en commun se repoussent.

C'est ce qu'on voit en frottant avec une peau de chat un bâton d'ébonite, et en touchant avec le bâton ainsi électrisé un double pendule: les balles s'écartent, et le bâton les repousse.

Même expérience avec un bâton de verre frotté avec un morceau de drap, et un second double pendule. Mais ces deux modes d'électrisation sont différents: car le verre électrisé attire le premier pendule, et l'ébonite électrisée attire le second.

On en conclut que les corps électrisés par l'ébonite attirent les corps électrisés par le verre, et inversement; de plus, les expériences montrent qu'il n'y a pas d'autre mode d'électrisation: aucun corps n'attire ou ne repousse à la fois les deux pendules électrisés respectivement par le verre et par l'ébonite.

Autre expérience: si l'on frotte l'un contre l'autre deux plateaux, l'un de verre, l'autre de drap, et qu'on touche avec chacun d'eux un double pendule, chacun

deux repousse le pendule qu'il a électrisé et attire l'autre. Ainsi deux corps frottés l'un contre l'autre s'électrisent en sens inverse, de sorte qu'on ne peut pas produire l'une des électricités sans produire l'autre. On les distingue par les épithètes de <u>positive</u> (celle du verre) et de <u>négative</u> (celle de l'ébonite) Ces expressions se justifient par ce fait que les deux électricités ont des effets géométriques opposés ~~contraires~~ ou de signe contraire (attraction, répulsion)

<u>Expérience d'Épinus</u>: Électrisation par influence (ou par induction, disent les Anglais) d'un cylindre par une sphère électrisée Les doubles pendules suspendus le long du cylindre divergent; mais les deux extrémités ont des électricités contraires, car un bâton électrisé attire les pendules de l'une et repousse ceux de l'autre. De plus, l'extrémité voisine de la sphère a une électricité contraire à celle de la sphère; car celle-ci attire le pendule de cette extrémité.

<u>Expérience de Gray</u>: Un fil conducteur très long, suspendu à des fils isolants, est électrisé à un bout; immédiatement on voit diverger le double pendule suspendu à l'autre bout. Ainsi l'électricité se transmet à grande distance et presque instantanément le long des corps conducteurs.

Tous ces faits étaient connus dès le siècle dernier. Pour les expliquer, ou plutôt pour les résumer et les coordonner, on a imaginé diverses hypothèses.

1° La première hypothèse qui ait prévalu est la théorie des deux fluides, inventée par Symmer. Tout d'abord, on a imaginé l'électricité comme un fluide qui coulait dans les conducteurs, et comme l'électrisation ne change pas le poids des corps, on concevait ce fluide comme impondérable (1)

Pour expliquer les deux modes d'électrisation contraires, on imagina deux fluides distincts : le fluide vitreux ou positif ; le fluide résineux ou négatif. Et comme on répugnait à concevoir ces deux fluides comme créés ex nihilo par le frottement, on admit que les deux fluides sont mélangés dans les corps à l'état naturel et composent le fluide neutre. Il s'ensuit que les quantités des fluides contraires dégagés par le frottement

(1) Thalès de Milet expliquait l'attraction électrique par la présence d'une âme dans l'ambre frotté. Nous disons aujourd'hui que le corps possède une énergie. Thalès entendait par âme une puissance motrice, une faculté d'agir, ce que nous appelons une énergie. Nous ne sommes donc pas plus avancés que lui ; les deux expressions ne sont que des moyens, équivalents au fond, de voiler notre ignorance

doivent être égales : et en fait, les deux plateaux électrisés en sens contraire par leur mutuel frottement neutralisent leurs effets : ils n'attirent ni ne repoussent aucun corps.
juxtaposés Enfin, comme on peut électriser indéfiniment le même corps, en faisant chaque fois disparaître l'un des deux fluides (électroscope par ex.), il a fallu admettre que tout corps a une provision indéfinie de fluide neutre, de sorte qu'il soit une source inépuisable de chacun des deux fluides provenant de la décomposition du fluide neutre.

Cette hypothèse a été très utile à l'Électrostatique, et fournit encore un moyen commode d'exprimer et de figurer les faits. Mais elle est invraisemblable ; en effet, la séparation des deux fluides, qui une fois séparés produisent des effets mécaniques intenses et parfois violents, n'exige pour ainsi dire aucun travail.

2° Hypothèse de Franklin ou théorie unitaire.

Franklin a remarqué que deux fluides électriques étaient de trop, et qu'il suffisait d'admettre un seul fluide, qui exercerait une action tant sur la matière que sur lui-même. L'électricité positive serait due à un excès ou à une condensation du fluide, la négative à un déficit ou à une raréfaction. L'état neutre correspondrait à la quantité normale de fluide

que chaque corps contient. Cette hypothèse suffirait à expliquer, non seulement tous les phénomènes électro-statiques, mais encore la gravitation universelle. Elle tient compte en effet de 3 sortes d'actions : Action de la matière sur la matière ; action de la matière sur le fluide électrique (et inversement) ; action du fluide électrique sur lui-même.

Newton a trouvé la loi de l'attraction de la matière ; Coulomb a établi que les attractions et répulsions électriques obéissent à la même loi, à un coefficient numérique près. On peut donc considérer toutes les actions comme proportionnelles aux masses gravifiques et électriques des corps.

Considérons deux corps, de masses m et m'. Soient a et a' les quantités de fluide qu'ils sont censés contenir à l'état neutre. En désignant par K le coefficient relatif à l'attraction de la matière sur la matière, k le coefficient relatif à l'attraction de la matière et de l'électricité, par κ le coefficient relatif à l'attraction du fluide électrique sur lui-même (c'est une répulsion, par hypothèse), la somme des 3 actions exercées par les deux corps l'un sur l'autre sera :

$$Kmm' + k(ma' + m'a) - \kappa aa'$$

et cette somme doit être égale à l'attraction newtonienne,

donc positive (les deux corps étant à l'état naturel.)

Supposons maintenant les deux corps électrisés positivement, c.à.d. ayant un excès de fluide qui est respectivement α et α'. Leur action totale l'un sur l'autre sera :

$$Kmm' + k[m(a'+\alpha') + m'(a+\alpha)] - \kappa(a+\alpha)(a'+\alpha')$$

et comme il y a répulsion, cette somme doit être plus petite que celle qui exprime la gravitation ; car l'effet ~~[illegible]~~ apparent est dû à la différence des deux sommes :

$$k(m\alpha' + m'\alpha) - \kappa(a\alpha' + a'\alpha + \alpha\alpha') < 0.$$

Changeons maintenant le signe de α', c.à.d. supposons le second corps électrisé négativement ; l'action apparente des deux corps (attraction) sera la différence (positive) :

$$k(m'\alpha - m\alpha') - \kappa(a'\alpha - a\alpha' - \alpha\alpha') > 0$$

Comme ces deux actions sont dues à des quantités égales d'électricité contraire, elles se détruisent mutuellement ; donc leur somme doit être nulle :

$$2km'\alpha - 2\kappa a'\alpha = 0 \qquad km' - \kappa a' = 0$$

d'où l'on tire : $$a' = \frac{km'}{\kappa}$$

On aurait obtenu de même, en changeant le signe de α :

$$a = \frac{km}{\kappa}$$

Cette relation détermine la quantité de fluide électrique que doit contenir un corps à l'état neutre. Elle

permet en outre de simplifier l'expression de la gravitation :

$$K m m' + k\left(m \frac{k m'}{\kappa} + m' \frac{k m}{\kappa}\right) - \kappa \frac{k^2 m m'}{\kappa^2} = m m'\left[K + \frac{k^2}{\kappa}\right]$$

Or l'on connaît le coefficient de mm' dans le cas de la gravitation (par les expériences de Cavendish, par exemple). On devra égaler $\left[K + \frac{k^2}{\kappa}\right]$ à ce coefficient. On a ainsi une relation entre les 3 coefficients arbitraires. On peut d'autre part déterminer le coefficient κ par expérience, en mesurant directement l'action de deux corps électrisés, qui est égale à $-\kappa\alpha\alpha'$.

On peut donc supposer entre K et k telle relation qu'on veut. En particulier on peut supposer, soit $K = 0$. (c.à.d. que l'action de la matière sur la matière est nulle), soit $k = 0$ (c.à.d. que l'action de la matière sur l'électricité, et vice versa, est nulle.) ~~Au~~ Dans tous les cas, on rendra compte de la gravitation. Ainsi l'hypothèse de Franklin laisse encore un coefficient arbitraire, c.à.d. qu'elle enveloppe une infinité d'hypothèses différentes.

Elle explique très bien le phénomène de la double électrisation en sens contraire : le frottement aurait pour effet de faire passer ~~*~~ la quantité d'électricité α d'un corps dans l'autre, de sorte que les quantités d'électricité contraire développées doivent toujours être égales.

Elle rend compte aussi de l'électrisation par influence :

Supposons la sphère électrisée positivement; en vertu de la répulsion du fluide sur lui-même, le fluide du cylindre reflue à l'extrémité opposée, qui sera donc électrisée positivement, tandis que l'autre sera électrisée négativement.

Enfin l'hypothèse de Franklin justifie, aussi bien que celle de Symmer, le principe de la conservation de l'électricité (formulé avec précision par M. Lippmann). Si l'hypothèse des deux fluides est commode pour expliquer les faits électrostatiques, la théorie unitaire est plus simple quand il s'agit des courants: car l'autre oblige à concevoir deux courants de sens opposé.

3° Les théories élastiques ont été remises en honneur récemment par Maxwell. Du temps de Descartes, on ne pouvait concevoir que l'action au contact: d'où l'hypothèse des tourbillons. Newton expliqua tous les phénomènes astronomiques par ~~l'action à distance~~ la gravitation; l'hypothèse d'une action à distance parut subversive et fit scandale, mais elle rendait compte si simplement et si facilement des lois astronomiques qu'elle prévalut. Coulomb l'ayant vérifiée pour les actions électriques lui apporta une nouvelle confirmation, de sorte qu'elle régna jusque vers le milieu de ce siècle. Mais, vers 1840,

Faraday, ignorant les mathématiques, émit des théories originales et réussit à expliquer une foule de phénomènes par l'action au contact. Son plus brillant élève, Maxwell, a fait triompher de nos jours cette manière de voir, en montrant que les actions à distance peuvent se ramener à des actions au contact ignorées ou inaperçues.

Soit par exemple un corps de pompe; on ne sait pas ce qu'il contient; mais quand on enfonce le piston et qu'on l'abandonne ensuite, on constate qu'il remonte. On peut expliquer ce fait par une répulsion du piston pour le fond du corps de pompe: c'est l'hypothèse la plus simple, et elle sera vérifiée par l'expérience car tout se passe en effet comme si elle était vraie. Et pourtant, si l'on sait que le corps de pompe contient un gaz, il sera naturel d'expliquer cette répulsion du piston par l'état contraint du gaz comprimé, c.à.d. par son élasticité, analogue à celle d'un ressort qu'on presserait entre le piston et le fond. Ainsi toute action à distance (entre deux corps) peut s'expliquer par une modification ou une déformation du milieu qui remplit l'intervalle et sert d'intermédiaire.

Pour résumer en deux mots l'hypothèse de Maxwell, le siège des phénomènes électriques ne serait pas la matière des corps électrisés, mais l'éther lumineux. Lorsqu'~~des~~ un

corps est électrisé, l'éther ambiant passe de l'état naturel à l'état contraint. Cet état peut correspondre à un déplacement : si l'on conçoit l'éther comme incompressible, on peut imaginer que l'éther se déplace en bloc du corps électrisé négativement vers le corps électrisé positivement. On voit que cette hypothèse concorde au fond avec celle de Franklin, et la précise ; le fluide inconnu qui quitte le premier corps pour envahir l'autre, c'est l'éther. Pour expliquer le détail des phénomènes électrostatiques, il suffit de préciser les propriétés élastiques de l'éther, et, puisqu'elles sont arbitraires, de les choisir de telle sorte qu'elles rendent compte des faits observés.

Pour pousser plus loin l'étude de ces phénomènes, il faut procéder à des expériences quantitatives, c.à.d. mesurer les forces électriques qui entrent en jeu.

Nous allons traiter, plus généralement, de la mesure des forces constantes.

Il y a deux méthodes pour mesurer les forces : au moyen de leurs effets statiques (équilibre) ; au moyen de leurs effets dynamiques (mouvement).

1° Méthode statique. L'instrument le plus commode et le plus employé est la balance. On applique la force à mesurer

à l'une des extrémités du fléau (verticalement) et on lui fait équilibre avec des poids dans l'autre plateau. Soit m la masse totale de ces poids, g l'accélération de la pesanteur au lieu de l'expérience; on aura la force F par la formule:

$$F = mg.$$

m étant évalué en grammes, g en centimètres, la valeur de F sera exprimée en dynes.

On construit aujourd'hui des balances sensibles au 20e et même au 50e de milligramme. Toutefois, pour que la mesure d'une force soit (assez) précise, il faut que cette force soit au moins d'un ou deux milligrammes.

Le défaut de la balance est la lenteur des opérations. Pour abréger les pesées, au lieu de s'efforcer d'obtenir l'équilibre du fléau dans la position horizontale, on le laisse prendre une position d'équilibre oblique, et l'on mesure l'angle d'écart α. On sait que c'est le poids π du fléau qui fait équilibre à l'excès de poids f de l'un des plateaux. Soit a la distance du centre de gravité du fléau au point de suspension, l la longueur du bras de fléau; la condition d'équilibre est:

$$\pi a \sin\alpha = fl \cos\alpha$$

d'où l'on tire:

$$f = \frac{\pi a}{l} \operatorname{tg}\alpha.$$

On ajoutera l'excédent f ainsi obtenu à F.

Une autre espèce d'appareil, imaginé par Gauss, est le système ou la suspension bifilaire. Deux fils fins, égaux et parallèles, de longueur l, soutiennent un barreau de masse m; leur distance est $2a$. Le barreau est en équilibre quand les deux fils sont parallèles; si on l'écarte de cette position, il y revient en oscillant, sous l'influence de la pesanteur, qui est la force antagoniste: En effet, quand on écarte le barreau, on relève son centre de gravité, parce que les fils deviennent obliques. Soit $PP' = h$ la hauteur dont le centre de gravité a monté: la pesanteur effectue un travail négatif dont la valeur absolue est mgh.

D'autre part, soit α l'angle dont le barreau a tourné en projection horizontale, et β l'angle dont les fils s'écartent de leur position verticale. On suppose que la force F reste perpendiculaire à la position d'équilibre du barreau AB; son bras de levier est donc (A'R étant perp. à MP'): P'R, ou $a \cos \alpha$. $A'R = a \sin \alpha$.

Appliquons le principe des vitesses virtuelles, pour trouver la condition d'équilibre. Le travail virtuel de la pesanteur est: $mg\,dh$.

Le travail virtuel de la force F est :

$$Fa\, d(\sin\alpha) = Fa\cos\alpha\, d\alpha$$

Evaluons h en fonction de α :

$$h = l(1-\cos\beta)$$

Il y a une relation entre β et α :

$$A'M = l\sin\beta = 2a\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Comme l est très long par rapport à α, on peut considérer β comme infiniment petit, c.à.d. remplacer $\sin\beta$ par β, et $(1-\cos\beta)$ par $\frac{\beta^2}{2}$: il vient :

$$h = \frac{l\beta^2}{2} \qquad l\beta = 2a\sin\frac{\alpha}{2} \qquad \beta = \frac{2a}{l}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

d'où : $dh = l\beta\, d\beta$ $\qquad d\beta = \frac{2a}{l}\cos\frac{\alpha}{2}\frac{d\alpha}{2} = \frac{a}{l}\cos\frac{\alpha}{2}d\alpha$

Donc : $dh = \frac{2a^2}{l}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}d\alpha = \frac{a^2}{l}\sin\alpha\, d\alpha$

Egalons les deux travaux virtuels :

$$mg\frac{a^2}{l}\sin\alpha\, d\alpha = Fa\cos\alpha\, d\alpha$$

d'où l'on tire F en fonction de l'angle α :

$$F = \frac{mga}{l}\tan\alpha.$$

Pour que le système bifilaire soit sensible, c.à.d. pour que à une ~~même~~ force donnée F corresponde un grand angle α, il faut que le facteur constant $\frac{mga}{l}$ soit très petit. Le système sera donc d'autant plus sensible que sa masse sera plus petite, et que les fils seront plus longs et plus rapprochés. Il n'y a pas de limite théorique à la sensibilité ; mais pratiquement, on ne peut pas rapprocher trop les fils, car si leur

diamètre n'était pas négligeable par rapport à leur distance la formule ne serait plus applicable. [3e leçons]

Une autre méthode de mesure statique des ~~grandeurs~~ forces est fournie par le pendule.

On suppose la masse du pendule concentrée en son centre de gravité G, de sorte que son poids se réduit à la force unique mg appliquée en G. Soit O le point de suspension : OG = a.

Soumettons le pendule à une force horizontale F appliquée en un p. B de OG : OB = b.

Soit α l'angle que OG fait avec la verticale dans la nouvelle position d'équilibre. Le bras de levier de la force F est OP = b cos α. BP = b sin α.

Le centre de gravité de G a monté de h = a(1 − cos α)

Le travail virtuel de la pesanteur est égal à :

$$mg\,dh = mga \sin\alpha \, d\alpha .$$

Le travail virtuel de la force F est égal à :

$$Fb\,d(\sin\alpha) = Fb \cos\alpha \, d\alpha$$

Egalons-les : $mga \sin\alpha = Fb \cos\alpha$

d'où l'on tire F en fonction de l'angle α :

$$F = \frac{mga}{b} \operatorname{tang} \alpha .$$

Même formule que plus haut ; mêmes conditions de sensibilité.

Il y a encore une autre méthode statique qui a recours à l'élasticité. Toutes les méthodes précédentes consistent à comparer les forces à mesurer à des poids ; celle-ci les compare aux forces élastiques, ou plutôt (comme on le verra plus loin) elle les compare encore aux poids par l'intermédiaire des forces élastiques : on mesure la déformation élastique produite par la force, puis on mesure le poids qui produit la même déformation.

Les forces élastiques dont on se sert généralement sont celles de torsion. Un fil métallique pincé en haut par un support immobile, porte suspendu à une autre pince un barreau horizontal ; ce barreau est en équilibre quand le fil n'est pas tordu (les deux pinces étant parallèles.)

La torsion a été étudiée expérimentalement par Coulomb (au siècle dernier), l'inventeur de la balance de torsion. Il a trouvé que l'angle de torsion varie en raison directe de la longueur du fil, en raison inverse de la 4e puissance du diamètre, et proportionnellement à la force :

$$\theta = A.F\frac{l}{R^4}$$

Quand on parle d'une force, on sous-entend qu'il s'agit d'un couple appliqué aux 2 extrémités du barreau, car une seule force ferait dévier le fil de la verticale, la force antagoniste étant une composante de la pesanteur.

Le coefficient A dépend des constantes élastiques α et μ du corps employé. On pourrait le calculer connaissant ces constantes; mais comme elles varient notablement d'un corps à l'autre, il vaut mieux ~~mesurer la force~~ le déterminer A par expérience. Il est plus simple de mesurer F en la remplaçant par un poids (agissant horizontalement par une poulie de renvoi) et en cherchant le poids qui produit la même torsion.

La balance de torsion est d'autant plus sensible que le coefficient de F est plus grand, c.à.d. que le rayon du fil est plus petit et sa longueur plus grande. La sensibilité est donc presque illimitée. On peut mesurer avec cet instrument des forces de $\frac{1}{200}$ de milligr. ou de dyne. Aussi est-il précieux pour l'étude de très petites forces, comme sont les forces électriques.

2° Méthode dynamique.

Elle consiste à mesurer la force par l'accélération qu'elle produit. C'est ainsi que Newton a déterminé la force de la gravitation d'après les lois du mouvement des astres. De même on mesure la pesanteur au moyen de son accélération, ~~dans~~ avec les appareils d'Atwood ou de Morin. Mais la mesure la plus précise de la pesanteur est fournie par le pendule.

La mesure dynamique des forces exige qu'elles soient

sensiblement constants dans les limites de l'expérience. Or, comme les forces électriques varient notablement à de petites distances, on ne peut employer à les mesurer de grandes machines comme celles d'Atwood & de Morin; il faut recourir à de petits appareils dans l'étendue desquels les actions électriques varient très peu. On est donc obligé de se servir du pendule.

Supposons d'abord que la force qui meut le pendule soit rigoureusement proportionnelle à l'angle d'écart.

$$F = k\alpha.$$

L'équation du mouvement sera alors comme on sait:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}\Sigma mr^2 = -ka\alpha.$$

$\Sigma mr^2 = K$ s'appelle le moment d'inertie du pendule.

La solution de l'équation a la forme suivante:

$$\alpha = A\sin(Bt - \varphi)$$

A et φ étant les constantes d'intégration, et B la constante:

$$B = \sqrt{\frac{ka}{\Sigma mr^2}}$$

Pour calculer la durée de l'oscillation complète, T, il suffit de remarquer que α est périodique, et reprend la même valeur quand l'argument augmente de 2π.

Donc: $BT = 2\pi$ $\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{ka}}$

Cette formule permet d'évaluer F en fonction de T:

$$F = 4\pi^2\frac{\Sigma mr^2}{T^2}$$

Il suffit pour cela de connaître le moment d'inertie du pendule. ~~Pour le~~ Quand il a une forme géométrique, on peut le calculer par une intégrale. Sinon, on peut l'évaluer par expérience.

Coulomb a appliqué le pendule à l'étude de la force de torsion. Si la force de torsion est proportionnelle à l'angle d'écart, les oscillations doivent être rigoureusement isochrones ; c'est ce que l'on vérifie par expérience pour toutes les amplitudes, même supérieures à 2π.

Pour que la pesanteur n'intervienne pas, le pendule est suspendu horizontalement au fil tendu verticalement ; il oscille autour de son centre de gravité.

Soit $\Sigma mr^2 = K$ son moment d'inertie par rapport à son centre. On peut le déterminer par expérience en accrochant symétriquement au barreau deux masses additionnelles M, à la distance R du centre. Le moment d'inertie sera augmenté de $2MR^2$, quantité connue. La durée d'oscillation se trouvera changée de T en T' :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{ka}} \qquad T' = 2\pi\sqrt{\frac{K+2MR^2}{ka}}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{K}{K+2MR^2}$$

équation du 1er degré qui fournit la valeur de l'inconnue K.

Pendule géodésique. Quand la force à mesurer est la pesanteur, la composante efficace est proportionnelle au sinus de l'angle d'écart; l'équation est alors:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}\,\Sigma mr^2 = -\,Mga\sin\alpha$$

Quand α est très petit, on peut remplacer $\sin\alpha$ par α:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}\,\Sigma mr^2 = -\,Mga\,\alpha$$

L'intégrale de cette équation approchée est:

$$\alpha = A\sin(Bt - \varphi)$$

où:

$$B = \sqrt{\frac{Mga}{\Sigma mr^2}} \qquad BT = 2\pi$$

La durée d'une oscillation complète est donc:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{Mga}}$$

Mga est le moment statique de la pesanteur.

Cette formule ne vaut que pour les oscillations infiniment petites. En désignant la valeur précédente de T par T_0, l'intégrale de l'équation générale est rigoureusement:

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\omega}{2} + \frac{1.3}{2.4}\sin^4\frac{\omega}{2} + \ldots\ldots\right)$$

ω étant l'amplitude de l'oscillation (angle d'écart maximum.)

On voit que pour $\omega = 0$, T se réduit à T_0.

On peut tirer de cette dernière formule des formules approximatives. Si l'on veut sûr de T qu'à $\frac{1}{200}$ près, $\sin\frac{\omega}{2}$ sera déterminé à $\frac{1}{50}$, ce qui correspond à la valeur $\omega = 16°$. Ainsi pour une amplitude de 16° au plus, la formule de T_0 est exacte à $\frac{1}{200}$ près. Et comme T entre au carré

dans l'expression de la force, celle-ci sera évaluée à $\frac{1}{100}$ près. En général, on peut déterminer d'avance l'amplitude maxima qui correspond à l'approximation qu'on désire atteindre avec la formule de T_0.

— Nous allons maintenant décrire les expériences par lesquelles Coulomb a déterminé la loi des actions électrostatiques.

Balance de torsion: Elle est constituée par un fil d'argent très fin, auquel est suspendue une aiguille isolante qui porte à une extrémité une balle de moelle de sureau dorée. Sur la circonférence que décrit cette balle, on place en un point fixe une balle semblable supportée par un bâton de cire. Cette circonférence est marquée par une bande de papier gradué en degrés; le zéro correspond à la balle fixe.

D'autre part, la pince qui porte le fil passe à frottement dur dans une virole qui ferme en haut le tube de verre qui contient le fil; on peut ~~la~~ déplacer la pince au moyen d'un bouton qui porte un index; cet index parcourt une graduation marquée sur le pourtour de la virole. Celle-ci peut elle-même se déplacer tout d'une pièce sur le tube, en emportant la pince et l'index.

— On amène les 2 balles au contact en tournant la

virole (l'index correspondant au zéro de la graduation.)
Puis on électrise les 2 balles avec un même corps ; elles se repoussent, et ~~s'écartent~~ la balle mobile s'écarte d'un angle α (mesuré sur la circonférence en papier.) On peut les rapprocher en tournant le bouton supérieur, c.à.d. en augmentant la torsion du fil. (en sens inverse) Soit α l'angle d'écart définitif ; l'angle de torsion T du fil sera la somme de cet angle α et de l'angle dont ~~on~~ aura tourné le bouton (mesuré par l'index sur la virole.)

La force de répulsion est dirigée suivant la ligne AB qui joint les 2 balles : soit l la longueur radiale de l'aiguille ; le moment de la force de répulsion sera

$$Fl \cos\frac{\alpha}{2}.$$

D'autre part, le moment de la force de torsion (proportionnelle, comme on sait, à l'angle de torsion) est :

$$klT.$$

Puisqu'il y a équilibre, ces deux moments sont égaux :

$$Fl\cos\frac{\alpha}{2} = klT.$$

Or la distance des deux balles est : $AB = 2l \sin\frac{\alpha}{2}$.
Si la loi de Coulomb est vraie, F doit être en raison inverse du carré de la distance, c.à.d. avoir la forme :

$$\frac{B}{4l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

Substituons cette formule (hypothétique) dans l'équation :

$$\frac{B\cos\frac{\alpha}{2}}{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = kT$$

ou, en faisant passer dans le 2e membre les quantités constantes :

$$\frac{T\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{B}{4l^2k} = \text{Constante.}$$

Telle est la loi (relation entre T et α) qu'il s'agit de vérifier. Or, dans les expériences de Coulomb, α était au plus égal à 36°, donc : $\frac{\alpha}{2} \leq 18°$.

Dans ces conditions, on peut remplacer $\sin\frac{\alpha}{2}$ par $\frac{\alpha}{2}$, et $\cos\frac{\alpha}{2}$ par 1. L'erreur commise est de $\frac{17}{1000}$, soit moins de $\frac{1}{50}$. Cette approximation consiste, en somme, à identifier l'arc à la corde et à compter la distance des deux balles sur la circonférence ; et en effet, la loi devient simplement : $T\alpha^2 = C^{te}$.

On constate en effet que l'angle de torsion (et par suite la force de torsion) est inversement proportionnel au carré de l'angle α (distance angulaire des 2 balles)

Pour apprécier le degré d'approximation de cette loi, il faut tenir compte des causes d'erreur. Or, pour obtenir des répulsions notables, on est obligé d'employer de fortes charges ; mais alors il se produit des déperditions qui altèrent les résultats, puisque la charge n'est plus constante. Coulomb observa en effet que $T\alpha^2$ diminuait

avec le temps. Il détermina alors la déperdition en mettant les deux balles à une distance donnée, et en les maintenant à cette distance en tournant le bouton de manière à détordre le fil. Il tenait compte de cette détorsion dans ses autres expériences, de manière à compenser la diminution de force due à la déperdition.

Une autre cause d'erreur est l'influence mutuelle des deux balles, qui repousse les charges du côté opposé, surtout quand elles sont à petite distance. Les centres de masse électrique se déplacent donc par rapport aux centres de gravité des balles, et leur distance est plus grande que la distance ~~mesurée~~ de ceux-ci. On peut calculer cet effet, et corriger les distances mesurées. Néanmoins, l'inexactitude totale, due à ces diverses causes d'erreur, peut être de $\frac{1}{50}$, ce qui suffit à justifier l'approximation introduite dans les formules.

4e leçon

Un peu après les expériences de Coulomb, Cavendish appliqua la même méthode à l'étude de la gravitation. Il employait la balance de torsion, suspendait de petites boules aux deux extrémités du levier, et mesurait l'attraction exercée sur elles par de grosses boules fixes.

Nous avons vu la balance de Coulomb servir

à la mesure des répulsions électriques; mais elle se prête mal à la mesure des attractions électriques, car il est difficile d'empêcher les boules chargées d'électricité contraire d'arriver au contact. On peut considérer la vérification de la loi des attractions comme superflue, si l'on admet qu'un corps neutre n'agit pas sur un corps électrisé; car si les deux fluides contraires, dont on le suppose chargé également, neutralisent leurs effets, la répulsion devra obéir aux mêmes lois que l'attraction.

Mais ce n'est là qu'une hypothèse, et le meilleur moyen de la confirmer serait précisément de vérifier directement la loi des attractions. Aussi Coulomb n'a-t-il pas négligé de la vérifier; pour cela il a eu recours à la méthode dynamique des oscillations du pendule.

A un fil de cocon il suspendait un petit levier isolant de gomme laque, portant à une extrémité un petit disque de clinquant. Le pendule étant électrisé, il en approchait une grosse sphère métallique électrisée en sens contraire; le pendule attiré et dévié de sa position d'équilibre exécute des oscillations ~~rigoureuse~~ sensiblement isochrones.

En effet, on démontre qu'une sphère agit comme si toute sa masse était condensée en son centre. D'autre part, on peut considérer l'action de la sphère sur le pendule comme

constante en grandeur et en direction, vu les petites dimensions du pendule, qu'on peut regarder comme infiniment petites par rapport à celles de la sphère. On rentre donc dans le cas du pendule géodésique, la sphère jouant le rôle de la terre. On sait que dans ce cas la durée d'une oscillation complète est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{Fl}}$$

l étant la longueur du bras de levier qui porte le disque. On en tire la valeur de la force attractive constante :

$$F = 4\pi^2 \frac{\Sigma mr^2}{T^2 l} \qquad \text{où : } 4\pi^2 \frac{\Sigma mr^2}{l} = \text{Const.}$$

Ainsi la force attractive est en raison inverse du carré de la durée d'une oscillation. D'autre part, selon la loi hypothétique qu'il s'agit de vérifier, F doit être aussi en raison inverse du carré de la distance d du pendule au centre de la sphère. Donc, si la loi est vraie, la durée des oscillations T doit être proportionnelle à la distance d. C'est en effet ce que l'on constate par expérience.

Cette méthode est sujette aux mêmes critiques que celle de la balance de torsion, fondées sur la déperdition de l'électricité et sur l'influence. Ces causes d'erreur sont assez grandes pour que l'on ne puisse pas tenir compte de la variation de T due à la différence des amplitudes. Toute correction de ce chef étant illusoire, on a le droit

de la négliger.
La loi de Coulomb, tant pour l'attraction que pour la répulsion, n'est donc établie qu'avec une approximation assez faible. Depuis, Harris a essayé de la vérifier avec le système bifilaire, mais sa méthode n'était pas plus précise que celle de Coulomb. Nous trouverons plus tard des preuves plus exactes, mais indirectes, de la vérité de cette loi. Si l'on accepte la loi de Coulomb comme vraie, on en tirera une foule de conséquences que l'on pourra vérifier; on choisira celles qui sont susceptibles de la vérification la plus rigoureuse.

On a remarqué l'analogie de la loi de Coulomb et de la loi newtonienne de la gravitation :

$$F = k\frac{mm'}{r^2}$$

Pour compléter cette analogie, on est conduit à définir des masses électriques. Seulement, tandis que nous pouvons mesurer les masses de matière par la méthode statique (la balance, par ex.) nous n'avons pas d'autre moyen de mesurer les masses électriques que leurs effets dynamiques (attraction ou répulsion). Un corps aura, par définition, une masse électrique double, triple, etc. s'il exerce une attraction double, triple etc. sur un même petit corps chargé d'une quantité constante d'électricité. Il serait donc vain de chercher à vérifier la proportionnalité

des forces électriques aux masses, car cela constituerait un cercle vicieux.

Néanmoins Coulomb, imbu de la matérialité du fluide électrique, a prétendu vérifier cette proportionnalité au moyen de la balance de torsion. Dans une première expérience, la boule mobile était repoussée par la boule fixe : on mesurait l'angle d'écart α et l'angle de torsion T. Puis Coulomb touchait la boule fixe avec une autre boule toute semblable, qu'il retirait ensuite. Il admettait que les deux boules, étant égales, avaient la même charge, et il en concluait que la boule fixe avait une charge moitié de sa charge primitive. L'écart ayant diminué, il l'augmentait en détordant le fil, et quand l'écart était redevenu α, il constatait que la torsion était $\frac{T}{2}$. C'est ainsi qu'il croyait vérifier par expérience la loi de proportionnalité des forces aux masses.

Nous concluons, tout au contraire, de cette expérience que lorsque deux boules égales se touchent, une seule étant électrisée, la charge de chacune est la moitié de la charge primitive, puisque la répulsion exercée devient moitié moindre. En effet, s'il est évident, par raison de symétrie, que les deux boules prennent la même charge en se touchant, rien ne prouve que leur charge respective soit la moitié de

la charge primitive: cela suppose que la quantité d'électricité reste constante, et ne fait que se dédoubler au contact, en un mot, que les masses électriques s'additionnent et se partagent comme des masses matérielles. Or c'est ce qui n'est nullement nécessaire a priori, et ce que l'expérience précédente peut seule nous apprendre. On vérifie ainsi, dans un cas particulier, le principe de la conservation de l'électricité.

De ce que la force est proportionnelle à la masse électrique de chacun des deux corps qui s'attirent ou se repoussent, on conclut qu'elle est proportionnelle à leur produit. Si les deux masses sont de même signe, leur produit est positif, et l'on sait qu'alors la force est répulsive. Si les masses sont de signes contraires, leur produit est négatif, et dans ce cas la force est attractive. On considérera donc les répulsions comme positives et les attractions comme négatives: les ~~unes~~ premières tendent à augmenter la distance, les secondes à la diminuer.

Le coefficient k, qui figure dans la formule, dépend du choix de l'unité de masse électrique, et aussi de la nature du milieu où les corps sont plongés, car ~~la force~~ l'expérience montre que la force qui s'exerce entre deux corps électrisés varie suivant le milieu (diélectrique) à travers lequel elle s'exerce. Nous considérerons donc les deux corps

dans le vide, et nous définirons l'unité de masse comme suit :

Deux masses électriques égales sont égales à l'unité, quand elles exercent l'une sur l'autre, à l'unité de distance, une force répulsive égale à l'unité (dans le vide).

~~Si l'on évalue la distance r en centimètres et la ~~masse~~ force F en dynes~~ En vertu de cette définition, on aura $F = 1$ pour :

$$m = 1, \quad m' = 1, \quad \text{et} \quad r = 1.$$

Par conséquent, ~~avec~~ pour l'unité choisie, $k = 1$.

L'unité que nous venons de définir est l'unité électrostatique de l'électricité. Elle dépend d'ailleurs de l'unité de longueur et de l'unité de force. Dans le système C.G.S., l'unité El. St. sera celle qui correspond à une force de 1 dyne et à la distance de 1 centimètre.

Ainsi la formule simple $F = \dfrac{mm'}{r^2}$ ne convient qu'au système d'unités électrostatiques, et dans le cas du vide. Nous conserverons donc la formule générale avec le coefficient k.

Propriétés des champs électriques.

On appelle champ électrique tout espace où s'exercent des forces électriques.

Considérons le champ produit par une seule particule matérielle M chargée de la masse électrique m. Une masse électrique A égale à l'unité, placée dans ce champ à une

distance r sera soumise à une force centrale égale à

$$\frac{km}{r^2}.$$

Cette loi de force caractérise le champ électrique.

Si la particule A obéit à la force, elle subira un déplacement infiniment petit AA' suivant AM. En A', elle sera soumise à une autre force qui lui imprimera un déplacement infiniment petit A'A''; et ainsi de suite. L'enveloppe des déplacements AA', A'A'', etc. s'appelle une ligne de force (Faraday). Ce serait la trajectoire de la masse électrique sous l'action du champ, si l'on détruisait à chaque instant sa vitesse acquise. Dans le cas d'une seule masse produisant le champ, les lignes de force sont toutes les droites qui rayonnent autour du point occupé par cette masse.

On appelle surface de niveau une surface qui coupe normalement toutes les lignes de force. Dans le cas d'un champ produit par une seule masse, les surfaces de niveau sont toutes les sphères ayant pour centre cette masse. — L'expression de surface de niveau est une métaphore tirée de la géodésie.

Ces définitions sont générales, et ne dépendent nullement de la loi de Coulomb ou de telle autre loi particulière de force. Il suffit que la force soit

une fonction continue de la distance (ou de la position).
Les lignes de force seront les enveloppes des directions de la force aux différents points du champ, et les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau, celles-ci étant telles que la force qui s'exerce en chacun de leurs points leur est normale.

Définition analytique du flux de force

Soit dans un champ électrique une surface limitée par une courbe fermée. Considérons en chacun de ses points la force F qui s'exercerait sur l'unité de masse placée en ce point, et la normale dirigée vers l'extérieur; soit α l'angle de leurs directions. Formons le produit:

$$F ds . \sin(F, ds) = F ds . \cos \alpha$$

L'intégrale de cette différentielle (ds élément de surface) étendue à toute la surface, est le flux de force qui traverse cette surface: $\mathcal{F} = \int F ds . \cos \alpha$.

Restreignons-nous maintenant au cas particulier où le champ est produit par une seule masse m au point M et où la force est en raison inverse du carré de la distance.
Considérons une surface fermée quelconque entourant ~~la masse~~ le point M.
On va démontrer que le flux de force qui la traverse est égal à: $4 \pi k m$.

Construisons un cône élémentaire, de sommet M et

d'ouverture ω : ω est l'angle solide du cône, c.à.d. la surface qu'il intercepte sur une sphère de rayon 1 ayant son sommet pour centre. Ce cône traverse la surface en A et y découpe un élément ds. Soit r la longueur MA : la force en A est : $F = \frac{km}{r^2}$, et elle est dirigée suivant MA.

Évaluons ds. Menons par A une sphère de centre M ; soit $d\sigma$ la portion de sa surface interceptée par le cône :

$$d\sigma = r^2 \omega.$$

D'autre part, α, étant l'angle de la force AF et de la normale AN, est aussi l'angle des 2 éléments ds et $d\sigma$: donc :

$$d\sigma = ds \cos\alpha.$$

Formons le produit : $F ds \cos\alpha$: $\frac{km}{r^2} \times r^2\omega = km\omega$.

Intégrons : $\mathcal{F} = \int km\omega = km \int \omega$.

Or $\int \omega$, étendue à toute la surface qui entoure le p. M, est égale à la surface de la sphère de rayon 1, soit 4π ; donc :

$$\mathcal{F} = 4\pi km$$

Le flux de force (indépendant de la surface considérée) est proportionnel à la masse m, et peut par conséquent lui servir de mesure.

Considérons maintenant le cas où le point électrisé M se trouve à l'extérieur d'une surface fermée. On va prouver que le flux de force qui la traverse est nul.

Menons du sommet M un cône élémentaire, qui perce la surface en A (entrée) et en A' (sortie). La direction de la force, MAA', fait avec la normale à l'entrée un angle $\alpha > \frac{\pi}{2}$, dont le cosinus est négatif, et avec la normale à la sortie un angle $\alpha' < \frac{\pi}{2}$, dont le cosinus est positif. Soient ds, ds' les éléments de surface interceptés par le cône en A et A', $d\sigma$, $d\sigma'$ les éléments de surface sphérique aux mêmes points (en valeur absolue); on aura:

$$ds \cos\alpha = -d\sigma \qquad ds' \cos\alpha' = +d\sigma'.$$

D'ailleurs: $\quad d\sigma = r^2\omega \qquad d\sigma' = r'^2\omega.$

Formons les deux produits $F ds \cos\alpha$:

$$-\frac{km}{r^2} \times r^2\omega \qquad + \frac{km}{r'^2} \times r'^2\omega$$

ou: $\quad - km\omega \qquad + km\omega$

On voit qu'ils se détruisent. Tous les éléments de l'intégrale se détruisant ainsi deux à deux, le flux de force est nul.

Du reste, si l'on intègre séparément l'entrée et la sortie, on aura respectivement: $-\int_A km\omega$ et $+\int_{A'} km\omega$,

ou: $\quad -km\int_A \omega$ et $+km\int_{A'}\omega$.

Or les deux intégrales $\int\omega$ sont égales, car, si l'on circonscrit à la surface fermée un cône de sommet M, toutes deux sont égales à son angle solide; leur somme algébrique est donc nulle

Ainsi une surface fermée qui ne contient aucune masse électrique est traversée par un flux de force nul.

Considérons maintenant une surface fermée qui enveloppe certaines masses électriques $m, m', m'', \dots$ en laisse d'autres en dehors, mais n'en rencontre aucune. Nous allons démontrer que le flux de force qui la traverse est égal à $4\pi k \Sigma m$.

Pour ~~le prouver~~ cela, il suffit de ~~rappeler~~ prouver que le flux de force résultant est la somme des flux de forces composants. Soit R la force résultante en un point P de la surface, ε l'angle qu'elle fait avec la normale extérieure. Soient d'autre part $F, F', F'', \dots$ les forces exercées sur le point P par les masses intérieures et extérieures, $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ les angles qu'elles font avec la normale extérieure. En vertu du théorème des projections, on a (en projetant sur la normale):

$$R \cos \varepsilon = F \cos \alpha + F' \cos \alpha' + F'' \cos \alpha'' + \dots\dots$$

Donc: $\mathcal{F} = \int R ds \cos \varepsilon = \Sigma \int F ds \cos \alpha$.

Le flux de force total est la somme des flux de forces dus à toutes les masses: mais les flux de forces dus aux masses extérieures sont nuls; il ne reste donc que ceux des masses intérieures; par conséquent:

$$\mathcal{F} = 4\pi k m + 4\pi k m' + 4\pi k m'' + \dots = 4\pi k \Sigma m.$$

Ainsi les flux de forces qui traversent une même surface s'additionnent simplement. Supposons que la surface enferme plusieurs masses positives et négatives, telles que leur somme algébrique soit nulle; le flux de force sera nul.

Dans la pratique des électriciens, on matérialise les lignes de force et les flux de force. On imagine qu'une masse électrique m émet en rayonnant dans l'espace autant de lignes de force qu'il y a d'unités dans m. Le flux de force qui traverse une surface donnée est alors mesuré par le nombre des lignes de force qui la traversent. De là vient que le flux de force s'appelle, dans le langage vulgaire des praticiens, nombre de lignes de force, bien que ce ne soit pas un nombre mais une grandeur essentiellement continue, qui peut être incommensurable. On verra plus tard que les lignes de force vont toujours d'un corps électrisé à un autre, de sorte que l'on peut les figurer par des fils tendus entre ces deux corps. Cette image grossière fait comprendre la distribution des flux de forces autour des masses, par exemple ~~les~~ deux plateaux de verre et de drap, étant électrisés en sens contraire, toutes les lignes de force vont de l'un à l'autre, de sorte qu'aucune ne traverse une surface

quelconque qui enveloppe les deux plateaux: et en effet, leur action sur un corps extérieur quelconque est nulle.

Le travail des forces électriques, et généralement des forces qui ne sont fonctions que de la distance jouit de la propriété suivante:

Etant donnée une courbe fermée dans ~~l'espace~~ un champ, ne rencontrant aucune masse électrique, si une masse électrique la parcourt tout entière et revient à son point de départ, le travail des forces est nul.

Ce théorème est évident si l'on admet le principe de la conservation de l'énergie: car l'énergie doit être la même après qu'avant le cycle; ~~or~~ on pourrait alors décrire le cycle et produire du travail sans dépenser d'énergie, et cela indéfiniment (mouvement perpétuel.)

— Mais on peut le démontrer directement et d'une manière générale, dans l'hypothèse où les forces sont centrales et fonctions de la distance seule. En effet, soit R la résultante des forces sur chaque point de la courbe: elle sera fonction de sa position seulement. Le travail élémentaire sera: $d\mathcal{T} = R ds . \cos\alpha$

(α étant l'angle de R avec l'élément de courbe ds), et le travail total: $\mathcal{T} = \int R ds \cos\alpha$

intégrale prise le long de la courbe fermée, de A en A.

L'expression différentielle $R\,ds \cos\alpha$ est fonction des coordonnées du point considéré, l'intégrale prise entre deux points quelconques ne dépend donc que de leurs positions ; c'est une fonction uniforme $F(x, y, z.)$ Par suite, elle reprend la même valeur en revenant au même point ; l'intégrale, différence des deux valeurs, est nulle.

Les forces qui jouissent de cette propriété sont dites <u>conservatives.</u>

Cela posé, considérons deux surfaces de niveau S et S'. Si l'on déplace une masse électrique sur une surface de niveau, le travail est nul, puisque le déplacement est normal à la direction des forces. Supposons qu'on fasse passer une même masse électrique de A sur S en A' sur S', puis de A' en B' suivant S', puis de B' en B sur S, enfin de B en A suivant S. Le travail effectué doit être nul, puisqu'on a décrit un cycle fermé. D'ailleurs, le travail de A' en B' et de B en A est nul. Soit $\mathcal{T}$ le travail de A en A' ; le travail de B' en B est égal au travail $\mathcal{T}'$ de B en B', changé de signe ; on a donc pour le travail total :

$$\mathcal{T} - \mathcal{T}' = 0$$

d'où :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}'.$$

ce qui prouve que le travail nécessaire pour passer d'une surface de niveau à une autre est indépendant du chemin parcouru (les chemins AA', BB' sont quelconques). On peut donc caractériser chaque surface de niveau par le travail effectué pour y transporter l'unité de masse électrique par un chemin quelconque à partir d'une même origine (arbitraire). D'ailleurs, le travail nécessaire pour passer d'une surface à une autre ne peut être nul, donc chaque surface correspond à une valeur différente de $\mathcal{T}$, et réciproquement.

Posons : $$\mathcal{T} = -\mathbf{V}.$$

Cette fonction $\mathbf{V}$ (égale au travail changé de signe) s'appelle le potentiel. Elle a une valeur constante sur chaque surface de niveau, valeur qui caractérise cette surface. C'est pourquoi les surfaces de niveau se nomment aussi : surfaces équipotentielles.

5e Leçon

Entre les variations du travail et du potentiel on a en général la relation : $$dV = -d\mathcal{T}$$

ou encore : $$dV + d\mathcal{T} = 0$$

Puisque, d'après la 1re équation, la fonction V varie en sens inverse du travail, et de la même quantité, on peut la considérer comme une énergie potentielle (c'est même

de là que lui vient son nom de potentiel), et alors la 2e équation, qui exprime que la fonction $(V + \mathcal{T})$ est constante, est une forme du principe de la conservation de l'énergie. Le potentiel en un point représente l'énergie de la masse électrique 1 placée en ce point.

Considérons deux surfaces de niveau très voisines correspondant, l'une, S, à la valeur V du potentiel, l'autre S' à la valeur $V + \delta V$ (δV fini et constant). Supposons que l'unité de masse électrique se déplace du point A de S au point A' de S' suivant la direction de la force, c.à.d. normalement aux 2 surfaces: AA' est un segment de normale que nous appellerons δn:

$$\delta \mathcal{T} = - \delta V = F . \delta n$$

Or δV est constant, donc le produit $F \delta n$ est constant en tous les points des deux surfaces. Par conséquent, la distance normale des deux surfaces de niveau varie en raison inverse de la force au même point.

Pour figurer un champ électrique on peut tracer des surfaces de niveau très voisines, correspondant à des variations égales δV du potentiel. Le diagramme ainsi obtenu représentera le champ exactement comme les courbes de niveau, sur une carte, représentent le relief du sol: seulement la distance des courbes, sera

en raison inverse non plus de la pente, mais de la force.
On peut calculer la force (comme la pente) par la formule :

$$F = -\frac{\partial V}{\partial n}$$

Si maintenant l'on fait décroître indéfiniment ∂V et ∂n (jusqu'ici finies et constantes), on aura à la limite :

$$F = -\frac{dV}{dn}.$$

Ainsi la force, en chaque point d'une surface de niveau est la dérivée du potentiel par rapport à la normale, changée de signe. Nous allons calculer ses composantes X, Y, Z suivant les 3 axes rectangulaires de coordonnées.

$$d\mathcal{C} = F\,dn = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

car le travail de la résultante est égal à la somme des travaux des composantes (en vertu du théorème des projections.) — Autrement dit :

$$dV = -X\,dx - Y\,dy - Z\,dz$$

d'où l'on conclut :

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Ainsi les projections de la force sont les 3 dérivées partielles du potentiel, changées de signe.
Toutes ces propriétés sont générales, et ne dépendent pas de la loi de Coulomb.
Pour étudier un champ électrique et en tracer le diagramme la méthode la plus simple consiste à y promener un pendule

de Coulomb et à le faire osciller en différents points. En chaque point, la direction de la force est donnée par la position d'équilibre du pendule, et son intensité est en raison inverse du carré de la durée d'oscillation. On peut déterminer par tâtonnements les surfaces isodynamiques, c. à d. celles où la force est constante (et par suite la durée d'oscillation); on déterminera les lignes de force en déplaçant lentement le pendule dans sa direction. On trouvera les surfaces de niveau en cherchant une surface normale aux lignes de force. Quand on connaîtra une surface de niveau et la valeur F de la force en tous ses points, on obtiendra une surface de niveau voisine en portant sur chaque normale une longueur δn inversement proportionnelle à F: car alors: $\delta V = F.\delta n = \text{const}$.

Nous allons maintenant étudier les propriétés du potentiel pour les forces qui varient en raison inverse du carré de la distance, selon la loi de Coulomb.

Considérons d'abord le cas d'une masse électrique unique, $\underline{m}$, située au point A. Soit l'unité de masse placée au point B, à une distance $\underline{r}$ de A. Elle sera soumise à la force: $F = \dfrac{km}{r^2}$.

Supposons qu'elle éprouve un déplacement inf. petit

BB' suivant la direction de la force : le travail sera alors :

$$d\mathcal{T} = F \times BB' = \frac{km}{r^2} dr$$

et par suite : $dV = -\frac{km}{r^2} dr$

Intégrons : $V = \frac{km}{r} + C^{te}$

La constante étant arbitraire, nous la supposerons nulle.

Ainsi le potentiel est inversement proportionnel à la distance au point A.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires du point B ; ξ, η, ζ celles du point A (fixe). On aura :

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

Calculons les projections de la force sur les 3 axes :

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \quad Y = -\frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \quad Z = -\frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}$$

Or, en différentiant l'expression de r^2, on trouve :

$$r\,dr = (x-\xi)\,dx + (y-\eta)\,dy + (z-\zeta)\,dz$$

donc : $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-\xi}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-\eta}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-\zeta}{r}$

Par conséquent :

$$X = \frac{km}{r^2} \cdot \frac{x-\xi}{r} \quad Y = \frac{km}{r^2} \cdot \frac{y-\eta}{r} \quad Z = \frac{km}{r^2} \cdot \frac{z-\zeta}{r}$$

Considérons maintenant le cas d'un nombre quelconque de masses électriques $m, m', m'', \ldots$ placées aux points $A, A', A'', \ldots$ Les projections de la résultante des forces qu'elles exercent sur la masse 1 située au point B sont les sommes des projections des composantes ; on a donc :

$$X = \Sigma \frac{km}{r^2} \cdot \frac{x-\xi}{r} \quad Y = \Sigma \frac{km}{r^2} \cdot \frac{y-\eta}{r} \quad Z = \Sigma \frac{km}{r^2} \cdot \frac{z-\zeta}{r}$$

Or on a d'autre part:

$$X = -\frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \quad Y = -\frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \quad Z = -\frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}$$

On en conclut:

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{km}{r^2}$$

d'où, en intégrant:

$$V = \Sigma \frac{km}{r}.$$

Les mathématiciens suivent la marche inverse: ils posent la formule du potentiel, et en déduisent les propriétés qui pour les physiciens lui servent de définition.

On n'a considéré jusqu'ici que des masses électriques discontinues réduites à des points. Nous allons passer à l'étude du potentiel des corps électrisés. Ne sachant rien sur la nature de l'électricité ni sur la manière dont elle est répartie dans les corps, nous allons poser des définitions a priori, quitte à vérifier si elles sont conformes aux faits d'expérience.

Soit un corps électrisé A. On admet qu'un élément de volume inf. petit du corps a une charge électrique inf. petite; soit δv ce volume, δm sa charge; on suppose que $\frac{\delta m}{\delta v}$ est fini. De plus on admet que si l'élément de volume décroît indéfiniment et se réduit au point P, ce rapport tend vers une limite finie ρ qui est indé-

pendante de la forme de l'élément de volume :

$$\frac{dm}{d\tau} = \lim \frac{\delta m}{\delta v} = \rho .$$

On appelle ρ la densité électrique solide au point P.

Cette définition est calquée sur celle de la densité matérielle ; elle se justifie par l'analogie des forces électriques avec la gravitation (1)

La densité matérielle d'un corps hétérogène étant une fonction continue des coordonnées du point P, nous admettrons, par analogie, que la densité électrique solide est aussi une fonction continue de ces coordonnées.

Supposons la densité électrique ρ connue en chaque point du corps. Hachons le corps en éléments de volume par des plans parallèles aux axes : le volume de un élément de dimensions dx, dy, dz, sera :

$$d\tau = dx\,dy\,dz$$

et sa masse : $dm = \rho\, d\tau = \rho\, dx\,dy\,dz$

Soit r la distance du point B considéré au centre de gravité de l'élément de masse dm : Le potentiel élémentaire correspondant sera : $\dfrac{dm}{r}$

---

(1) L'hypothèse d'une densité électrique solide n'est vraie que pour les corps isolants, comme on le verra plus tard ; les corps conducteurs n'ont qu'une densité superficielle.

et le potentiel total du point A par rapport au corps B sera l'intégrale de ces éléments, c.à.d.:

$$V = \iiint \rho \frac{dx\,dy\,dz}{r}$$

intégrale prise dans les limites du volume du corps.

On peut évaluer le potentiel d'une autre manière, quand on exprime l'élément de volume en coordonnées polaires : R, θ et ψ :

L'élément de volume qui correspond aux variations de R, $d\theta$, $d\psi$ a pour expression :

$$R\,d\theta \cdot R\sin\theta\,d\psi \cdot dR$$

$$dv = R^2 \sin\theta \cdot dR\,d\theta\,d\psi$$

Donc: $dm = \rho R^2 \sin\theta \cdot dR\,d\theta\,d\psi$

et le potentiel a pour expression:

$$V = \iiint \rho \frac{R^2 \sin\theta}{r}\, dR\, d\theta\, d\psi.$$

Comme application, proposons-nous de calculer le potentiel d'une couche sphérique (homogène) infiniment mince sur une masse électrique extérieure ou intérieure.

Soit ε l'épaisseur uniforme de la couche, R son rayon. La charge totale M sera la somme des charges élémentaires. Or, pour un élément de surface ds, le volume

élémentaire sera εds, la masse élémentaire $\rho \varepsilon ds$; et comme la densité ρ est supposée constante, la masse totale sera: $\iint \rho \varepsilon ds = \rho \varepsilon \iint ds = \rho \varepsilon S$, S étant la surface totale de la sphère: $4\pi R^2$.
Posons: $\rho \varepsilon = \mu$; c'est une constante.
Considérons maintenant l'épaisseur de la couche comme nulle: μ sera la charge par unité de surface, c.à.d. la densité superficielle. On aura donc:

$$M = 4\pi \mu R^2.$$

Evaluons le potentiel de la surface de la sphère pour un point extérieur P.

Décomposons-la en zones infiniment minces par des plans perpendiculaires à OP :
Soit MNM'N' une de ces zones, HH' sa hauteur : son aire aura pour valeur: $2\pi R . HH'$
Or, si l'on appelle α l'angle MOP: $OH = R\cos\alpha$, et HH' est la variation de OH:

$$HH' = d(R\cos\alpha) = -R\sin\alpha\, d\alpha.$$

Donc l'aire de la zone est: $-2\pi R^2 \sin\alpha\, d\alpha$,
et sa masse électrique: $-2\pi\mu R^2 \sin\alpha\, d\alpha$.
Le potentiel élémentaire correspondant est $-\dfrac{2\pi\mu R^2 \sin\alpha\, d\alpha}{r}$.

Évaluons r, distance du point P à la zone MN, en fonction de R et de $OP = a$. Le triangle MOP donne :

$$r^2 = R^2 + a^2 - 2aR\cos\alpha$$

Donc le potentiel total a pour expression :

$$V = \int \frac{2\pi\mu R^2 \sin\alpha\, d\alpha}{(R^2 + a^2 - 2aR\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

Or la dérivée de : $(R^2 + a^2 - 2aR\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}$

est :

$$\frac{aR\sin\alpha}{(R^2 + a^2 - 2aR\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

Donc :

$$V = \frac{2\pi\mu R}{a}\left(R^2 + a^2 - 2aR\cos\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$$

intégrale prise entre les limites $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, afin d'avoir toute la sphère. Distinguons les 2 cas :

1er Cas : Le point P est extérieur à la sphère : $a > R$.

On a alors :

$$V = \frac{2\pi\mu R}{a}\left[\sqrt{R^2 + a^2 + 2aR} - \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR}\right]$$
$$= \frac{2\pi\mu R}{a}\left[R + a - (a - R)\right] = \frac{4\pi\mu R^2}{a}.$$

Or on sait que : $4\pi\mu R^2 = M$.

Donc on a simplement : $V = \frac{M}{a}$.

On voit que le potentiel a la même valeur que si toute la masse de la couche sphérique était condensée au centre.

2e Cas : Le point P est intérieur à la sphère $a < R$.

On a alors : $V = \frac{2\pi\mu R}{a}\left[R + a - (R - a)\right] = 4\pi\mu R$,

qui est une constante. Ainsi le potentiel à l'intérieur d'une couche sphérique est constant.

Le calcul du potentiel a surtout pour but l'évaluation des forces, qui en sont les dérivées. Dans le 1er cas, la force, dirigée suivant OP (par raison de symétrie) a pour valeur: $-\frac{dV}{da} = \frac{M}{a^2}$

Cette formule exprime le théorème de Newton: l'attraction d'une couche sphérique sur un point extérieur est en raison inverse du carré de sa distance au centre.

Dans le 2e cas, le potentiel étant constant, sa dérivée est nulle dans toutes les directions; donc la force est nulle. Ainsi une masse placée à l'intérieur d'une couche sphérique homogène n'est soumise à aucune force. Ce théorème est également dû à Newton.

On pourrait aussi le démontrer sans calcul, et sans passer par l'intermédiaire du potentiel.

Considérons une couche sphérique de centre O et un point A quelconque à l'intérieur. Menons du sommet A un cône élémentaire, d'angle solide ω, qui découpe sur la surface les éléments MN, M'N', d'aire ds, ds'. L'élément MN a une charge $\mu\, ds$, dont l'action à la distance AM = r est: $\frac{\mu\, ds}{r^2}$.

Soit $d\sigma$ l'élément de surface sphérique ayant pour centre A et pour rayon r, et α l'angle AMO, qui est aussi

l'angle des éléments ds et $d\sigma$: $d\sigma = ds \cos\alpha$

D'autre part : $d\sigma = r^2\omega$, $ds = \frac{r^2\omega}{\cos\alpha}$

La force exercée par l'élément MN sur A a donc pour valeur : $\frac{\mu r^2 \omega}{r^2 \cos\alpha} = \frac{\mu\omega}{\cos\alpha}$.

Or la force exercée par M'N' est directement opposée, et égale à la précédente : car l'angle α est le même, puisque : $AMO = AM'O$.

Ainsi les forces exercées par les deux éléments opposés se font équilibre. On pourrait partager la surface sphérique en 2 parties par un plan quelconque mené par A, et balayer chacune de ces parties par l'un des 2 cônes élémentaires : on trouverait que toutes les actions des éléments opposés sont égales et contraires, de sorte que les deux sommes se détruisent, et l'action totale est nulle.

Il faut remarquer que la loi de Coulomb (ou de Newton) est la seule qui donne ce résultat. C'est ce que nous allons démontrer d'après M. Bertrand.

Supposons que la force soit une fonction quelconque de la distance : $F = mm' f(r)$

L'action sur l'unité de masse électrique sera :

$$F = m\, f(r)$$

Si la loi de Coulomb est vraie, $f(r) = \frac{k}{r^2}$,

donc : $r^2 f(r) = k = \text{Const.}$

Posons donc: $r^2 f(r) = \varphi(r)$

Cette fonction n'est constante que dans le cas de la loi de Coulomb. Si elle n'est pas constante, et si elle est continue, on peut toujours trouver un intervalle (r_0, r_1) dans lequel elle varie constamment dans le même sens.

Prenons alors pour diamètre de la sphère la droite $PP' = r_0 + r_1$, le point A étant respectivement aux distances r_0 et r_1 de P et P' sur cette droite.

On va prouver que l'action de la surface sphérique sur le point A n'est pas nulle. Nous supposons que $r_0 < r_1$, et que $\varphi(r)$ va en croissant de r_0 à r_1.

Menons le plan QQ' perpendiculaire à PP' en A, et un cône élémentaire, de sommet A, qui traverse QQ'.

La charge de l'élément $MN = ds$ est μds, son action sur A: $\mu ds . f(r)$

Or (comme précédemment): $ds = \frac{r^2 \omega}{\cos\alpha}$

Donc: $F = \frac{\mu\omega}{\cos\alpha} r^2 f(r) = \frac{\mu\omega}{\cos\alpha} \varphi(r)$

L'action de M'N' est de même (α étant le même):

$$F' = \frac{\mu\omega}{\cos\alpha} \varphi(r')$$

Or $r < r'$, donc: $\varphi(r) < \varphi(r')$

et par conséquent: $F < F'$.

On verrait de même que l'action de chaque élément

situé au-dessus du plan QQ' est inférieure à l'action directement opposée de l'élément correspondant, situé au-dessous. Donc la somme des actions des éléments inférieurs l'emporte sur celle des éléments supérieurs, et la résultante ne peut être nulle.

Dans le cas où $\varphi(r)$ va en décroissant de r_0 à r_1, on a au contraire : $\varphi(r) > \varphi(r')$
et alors c'est la somme des actions des éléments supérieurs qui l'emporte sur celle des éléments inférieurs.

Toutes ces propriétés des forces électriques déduites de la loi de Coulomb, sont également vraies de la gravitation, qui obéit à la même loi. — Ainsi l'attraction exercée par une couche sphérique homogène sur une masse matérielle située à son intérieur est nulle.

L'attraction exercée sur une masse matérielle située à l'extérieur est la même que si la masse de la couche était condensée en son centre.

Ces deux théorèmes peuvent s'étendre à une sphère homogène ou du moins composée de couches concentriques homogènes. C'est ce qui nous a permis de considérer, dans l'expérience du pendule de Coulomb, la sphère qui l'attire comme réduite à son centre, bien que nous ne sachions pas comment l'électricité y est distribuée ; on admet seulement qu'elle est distribuée également autour du centre (par symétrie)

6e leçon

Nous n'avons considéré jusqu'ici que les forces électriques qui s'exercent à l'extérieur des corps électrisés. Il s'agit de savoir si elles s'exercent aussi à l'intérieur, comme la gravitation. C'est ainsi, par exemple, que la pesanteur agit encore à l'intérieur de la terre (dans un puits de mine) sur un corps qui tombe, sur un pendule, etc. On peut se demander si l'action de la pesanteur dépend de la forme et de la grandeur de la cavité.

De même, si l'on perce un trou très petit dans un corps électrisé, et qu'au fond du trou l'on place un point matériel M chargé de l'unité d'électricité, on se demande quelle est la force qui agit sur lui, et si elle dépend de la grandeur et de la forme du trou. A première vue, l'expression du potentiel : $\Sigma \frac{m}{r}$ paraît devenir infinie dans ce cas, car il y a des points situés à une distance r infiniment petite de M. Mais rappelons-nous que, par hypothèse, la densité électrique ρ est finie ; par suite, l'élément de volume Δv ne contient qu'une masse électrique $\rho\,\Delta v$, infiniment petit du même ordre que Δv. Or Δv est un inf. petit du 3e ordre par rapport aux dimensions

linéaires ; si donc on divise $\rho \Delta v$ par Δr, inf. petit du 1er ordre, le quotient sera encore un inf. petit du 2e ordre. Ainsi les éléments du potentiel qui correspondent à des éléments du corps infiniment voisins du point M sont infiniment petits, et non infinis comme il semble d'abord.

Nous allons démontrer rigoureusement que le potentiel au point M est fini. Exprimons-le en coordonnées polaires (r, θ, ψ), le point M étant pris pour origine :

$$V = \iiint \rho \frac{r^2 \sin\theta . \, dr \, d\theta \, d\psi}{r}$$

ou simplement :

$$V = \iiint \rho r \sin\theta . \, dr \, d\theta \, d\psi$$

Autour du point M pris comme centre traçons une petite sphère de rayon R. Evaluons séparément le potentiel dû à cette petite sphère, V_2, et le potentiel dû aux autres éléments du corps, V_1 : $\quad V = V_1 + V_2$.

V_2 sera l'intégrale précédente prise dans les limites de la petite sphère :

$$V_2 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^R \rho r \, dr$$

Nous ne savons pas comment ρ varie à l'intérieur de la sphère ; nous savons seulement qu'elle reste finie. Soit ρ_1 une limite supérieure de sa valeur ; on aura :

$$V_2 < \rho_1 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^R r \, dr$$

Or: $\int_0^R r dr = \frac{R^2}{2}$ $\int_0^\pi \sin\theta d\theta = \cos 0 - \cos\pi = 2.$

$\int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi.$

Donc: $V_2 < 2\pi R^2 \rho_1.$

Si R est infiniment petit, V_2 sera un inf. petit du 2e ordre, on peut donc écrire: $V = V_1$

à un infiniment petit près du 2e ordre.

Ainsi pour évaluer le potentiel en un point M intérieur au corps, il est indifférent de supprimer la matière d'une sphère inf. petite entourant ce point, puisque cela revient à négliger V_2. On peut donc conserver la formule générale du potentiel pour un point intérieur, comme s'il était extérieur.

Nous allons évaluer en particulier le potentiel pour un point intérieur à une sphère homogène. Nous simplifierons le problème et nous contenterons d'une approximation; pour ~~une~~ la démonstration rigoureuse qui serait trop longue voir le Traité de Riemann.

Soit la sphère O, de rayon R, et le point intérieur A, à la distance a du centre ($a < R$.) Décomposons la sphère en couches concentriques.

Pour une couche extérieure au point A, le potentiel, étant constant à son intérieur, est le même en A qu'en O. Soit r la distance de la couche au centre (son rayon); son volume est: $4\pi r^2 dr,$

sa masse: $4\pi\rho r^2 dr$, et son potentiel au centre:

$$\frac{4\pi\rho r^2 dr}{r} = 4\pi\rho r dr. \qquad \text{(cf. p. 59.)}$$

Pour avoir le potentiel total des couches extérieures au p. A, intégrons cet élément entre les limites $(a+\varepsilon)$ et R:

$$V_E = \int_{a+\varepsilon}^{R} 4\pi\rho r dr = 4\pi\rho\int_{a+\varepsilon}^{R} r dr = 2\pi\rho\left[R^2-(a+\varepsilon)^2\right]$$

Pour une couche intérieure au point A, le potentiel est le même que si sa masse était condensée au centre. En sommant immédiatement toutes les couches intérieures, on trouve que le potentiel correspondant est celui d'une sphère de rayon $(a-\varepsilon)$: sa masse est: $\frac{4}{3}\pi\rho(a-\varepsilon)^3$, et son potentiel: $\frac{4}{3}\pi\rho\frac{(a-\varepsilon)^3}{a} = V_I$. (cf. p. 59.)
Le potentiel total (V_E+V_I) est celui qui règne dans ~~une~~ la cavité sphérique comprise entre les 2 surfaces sphériques de rayons $(a+\varepsilon)$ et $(a-\varepsilon)$, et contenant le point A.
Si l'on fait tendre vers 0 l'épaisseur 2ε de cette cavité, ~~on aura~~ V_E et V_I tendront vers des limites finies, dont la somme sera le potentiel de la sphère pour le point A:

$$2\pi\rho(R^2-a^2)+\frac{4}{3}\pi\rho a^2 = 2\pi\rho R^2-\frac{2}{3}\pi\rho a^2.$$

Le 1er terme $2\pi\rho R^2$ est constant pour tous les points intérieurs.

Evaluons maintenant la force qui s'exerce au point A. Tant que ε n'est pas nul, le point A étant en dehors de la masse électrisée, la force sera la dérivée du potentiel prise

suivant le rayon, car elle doit être dirigée suivant le rayon par raison de symétrie : $F = -\frac{dV}{da}$.

Or, si l'on fait tendre ε vers 0, cette dérivée aura pour limite la dérivée du potentiel V correspondant à $\varepsilon = 0$; c. à d. qu'il est indifférent de faire $\varepsilon = 0$ avant ou après la dérivation. Donc on peut considérer encore la force comme la dérivée du potentiel au p. A suivant le rayon :

$$F = \frac{4}{3}\pi\rho a = -\frac{dV}{da}.$$

Calculons les composantes X, Y, Z suivant les axes :

$$X = -\frac{dV}{da}\cdot\frac{da}{dx} \qquad Y = -\frac{dV}{da}\cdot\frac{da}{dy} \qquad Z = -\frac{dV}{da}\cdot\frac{da}{dz}$$

Or on a, x, y, z étant les projections de OA = a :

$$\frac{da}{dx} = \frac{x}{a} \qquad \frac{da}{dy} = \frac{y}{a} \qquad \frac{da}{dz} = \frac{z}{a}.$$

Donc :

$$X = \frac{4}{3}\pi\rho x \qquad Y = \frac{4}{3}\pi\rho y \qquad Z = \frac{4}{3}\pi\rho z$$

Pour le centre de la sphère, <u>a</u> est nul : la force aussi.

En résumé, la force est proportionnelle à la distance du point au centre ; elle est nulle au centre.

On serait arrivé à la même conclusion en considérant le centre comme un point intérieur à <u>toutes</u> les couches : on sait que leur action sur un tel point est nulle.

Calculons la somme des 3 dérivées secondes du potentiel :

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \Delta V.$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{dX}{dx} = \frac{4}{3}\pi\rho \qquad \frac{d^2V}{dy^2} = \frac{dY}{dy} = \frac{4}{3}\pi\rho \qquad \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{dZ}{dz} = \frac{4}{3}\pi\rho$$

Donc: $\Delta V = 4\pi\rho$ (constante)

De ces propriétés du potentiel d'une sphère homogène on peut tirer certaines conséquences touchant le potentiel d'un corps de forme quelconque, électrisé d'une manière quelconque. Soit à trouver la force en un point intérieur A. Cette force F est la résultante de la force F_2 produite par une sphère infiniment petite entourant le point A, et de la force F_1 produite par le reste du corps. Admettons que l'on puisse considérer la densité ρ comme constante dans cette sphère infiniment petite. En vertu du théorème précédent, la force F_2 qu'elle exerce sur son centre sera nulle. Donc:

$$F = F_1.$$

On en conclut que la force est finie, puisque F_1 est produite par des éléments situés à distance finie du p. A; et qu'elle est égale à la dérivée du potentiel changée de signe, puisqu'on peut supprimer la sphère et considérer le p. A comme extérieur au corps.

Calculons maintenant la valeur de ΔV au point A: Soit V_1 le potentiel provenant de la sphère inf. petite, V_2 le potentiel provenant du reste du corps: on aura

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2.$$

Or: $\Delta V_1 = 4\pi\rho$.

Quant à ΔV_2, on va démontrer qu'il est nul.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point qcque M du corps; ξ, η, ζ les coordonnées du point A:

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

Le potentiel dû aux éléments extérieurs est:

$$V_2 = \Sigma \frac{m}{r}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\Sigma \frac{m}{r^2} \cdot \frac{dr}{dx} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\Sigma \frac{m}{r^2} \cdot \frac{dr}{dy} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\Sigma \frac{m}{r^2} \cdot \frac{dr}{dz}$$

Or:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x-\xi}{r} \qquad \frac{dr}{dy} = \frac{y-\eta}{r} \qquad \frac{dr}{dz} = \frac{z-\zeta}{r}$$

Donc:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\Sigma \frac{m(x-\xi)}{r^3} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\Sigma \frac{m(y-\eta)}{r^3} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\Sigma \frac{m(z-\zeta)}{r^3}$$

On en tire:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \Sigma \left[\frac{3m}{r^5}(x-\xi)^2 - \frac{m}{r^3}\right] \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \Sigma \left[\frac{3m}{r^5}(y-\eta)^2 - \frac{m}{r^3}\right]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Sigma \left[\frac{3m}{r^5}(z-\zeta)^2 - \frac{m}{r^3}\right]$$

$$\Delta V_2 = \Sigma \left[\frac{3m}{r^5}\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right] - \frac{3m}{r^3}\right] = \Sigma \left[\frac{3m}{r^3} - \frac{3m}{r^3}\right] = 0.$$

Donc:

$$\Delta V = \Delta V_1 = 4\pi\rho \qquad (\text{constante})$$

Nous allons maintenant étudier le potentiel d'une surface électrisée; ce problème est très important pour l'électricité statique.

On va prouver que si une masse électrique traverse normalement la surface son potentiel varie d'une manière continue. Considérons en effet 2 points infiniment voisins P et P'

symétriques par rapport à la surface, et l'élément AB de la surface qui entoure la normale PP'. Comparons les potentiels des 2 points. L'élément AB étant sensiblement plan, les potentiels relatifs à cet élément sont égaux, puisque dans $\Sigma \frac{m}{r}$ toutes les distances r sont les mêmes.

Quant aux autres éléments de la surface, on peut les considérer comme infiniment éloignés par rapport à la distance PP'. Donc leurs distances respectives à P et à P' diffèrent infiniment peu; les potentiels correspondants ~~ne~~ ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite, c. q. f. d.

Etudions maintenant comment varie la force ~~du~~ entre le point P et le point P', et pour cela, distinguons sa composante normale et sa composante tangentielle. Considérons d'abord la force exercée par les éléments autres que AB. Comme ils sont infiniment éloignés, ~~leur~~ sa composante tangentielle reste la même, et la composante normale varie infiniment peu. Donc cette force reste continue quand le point mobile traverse la surface.

Considérons la force exercée par l'élément AB: sa composante tangentielle est nulle. Quant à sa composante normale, elle change de signe de P à P', en conservant la même valeur absolue. Par conséquent la force totale varie

du double de cette composante quand le point traverse la surface ; elle est donc discontinue.

Nous allons évaluer cette composante normale d'une manière approximative par un raisonnement simple employé par Coulomb.

Considérons une couche sphérique uniformément électrisée, et détachons-en une calotte infiniment petite ; prenons 2 points infiniment voisins sur le rayon central de la calotte, l'un en dehors, l'autre en dedans. Nous savons que la différence des forces qu'ils subissent est le double de la force exercée sur chacun d'eux par cette calotte sphérique. Or, sur le point intérieur la force totale est nulle. Sur le point extérieur, elle est la même que si toute la masse était condensée au centre.

Soit μ la densité électrique superficielle de la couche : sa charge sera : $4\pi r^2 \mu$.

Le point extérieur étant à la distance r du centre (à un inf. petit près), la force qu'il subit sera :

$$4\pi r^2 \mu : r^2 = 4\pi\mu.$$

Ainsi la ~~force~~ différence des forces est $4\pi\mu$, donc la force exercée par la calotte sur chaque point est $2\pi\mu$.

(On remarquera que ~~pour~~ sur le point intérieur, cette force fait équilibre à toutes les autres ; ainsi la force exercée

par l'élément inf. petit voisin du point est égale à celle qu'exerce le reste de la surface sphérique.)

Revenons à la surface quelconque considérée plus haut. Nous pouvons assimiler l'élément de surface AB à une calotte sphérique infiniment petite. La force normale qu'elle exerce sur chacun des points P, P' est donc $2\pi\mu$, et la variation de la composante normale de la force d'un côté à l'autre de la surface est $4\pi\mu$.

Nous allons à présent vérifier ces formules par l'expérience, et par là vérifier les principes d'où nous les avons déduites.

Les corps se divisent, à l'égard de l'électricité, en deux grandes catégories : les conducteurs et les diélectriques.

Étudions d'abord les conducteurs : on se rappelle l'expérience d'Æpinus, montrant l'électrisation d'un conducteur par influence (p. 14.) Dans la théorie des 2 fluides, on explique le phénomène en disant que les deux fluides mêlés dans le conducteur, subissant en sens inverse l'action du ~~corps~~ champ électrique, se séparent ; mais dès qu'ils se séparent, ils exercent l'un sur l'autre une attraction qui est une force antagoniste de l'action du champ ; cette séparation a donc pour effet d'affaiblir le champ à l'intérieur du conducteur. Les deux fluides auront

atteint l'équilibre quand il se sera décomposé une quantité de fluide neutre suffisante pour que les deux fluides dégagés neutralisent l'action du champ, de telle sorte que en tout point du conducteur la force soit nulle. On dit dans ce cas que le champ est nul à l'intérieur du conducteur.

La théorie unitaire fournirait une explication analogue: la distribution du fluide unique devra être telle qu'elle contrebalance l'action du champ à l'intérieur du conducteur.

Pour vérifier ces déductions, il faut constater si le champ est vraiment nul à l'intérieur d'un conducteur électrisé.

Pour cela, on emploie un électroscope formé de 2 fils métalliques suspendus à une même bouche et mis en communication avec une machine électrique. Dans l'air (isolant), ils divergent; plongés dans l'eau (conducteur) ils retombent; l'eau s'électrise, mais seulement à la surface.

Comment interpréter cette expérience dans l'hypothèse élastique? On considère les diélectriques comme élastiques, et les conducteurs comme mous, c.à.d. incapables de l'état contraint. Le champ étant nul à l'intérieur des conducteurs, il faut admettre qu'ils sont infiniment mous, c.à.d. n'opposent aucune résistance aux forces électriques.

Puisque les forces électriques sont les dérivées du potentiel et qu'elles sont nulles en tout point d'un conducteur, le potentiel est constant à l'intérieur d'un conducteur.

En général, (avons-nous vu (p. 70)) qu'on a à l'intérieur d'un corps électrisé: $\Delta V = 4\pi\rho$.

Mais dans un conducteur, $\Delta V = 0$,

on en conclut que: $\rho = 0$.

La densité électrique solide étant nulle, il n'y a pas d'électricité à l'intérieur d'un conducteur électrisé. On doit donc admettre que l'électricité réside à la surface des conducteurs.

Il ne faut pas concevoir la surface des corps comme une surface géométrique sans épaisseur. Les phénomènes capillaires obligent à concevoir les corps comme se modifiant mutuellement au contact, de sorte qu'au lieu d'être limités par une surface géométrique, ils sont séparés par une couche où il y a transition continue entre les deux matières qui se touchent; cette couche a une épaisseur très faible, qu'on estime à 1 ou 100.000^e de millimètre. C'est dans l'épaisseur de cette couche qui enveloppe tous les corps que réside probablement la propriété inconnue qu'on nomme électricité. La densité solide ρ de cette couche se traduit par la densité superficielle μ quand on assimile

la couche à une surface géométrique sur laquelle l'électricité serait répandue.

Pour prouver qu'en effet il n'y a pas d'électricité à l'intérieur d'un conducteur électrisé, on répète l'expérience due à Coulomb (et non à Biot): une boule électrisée qu'on enveloppe de 2 hémisphères creux leur cède toute son électricité.

Une expérience plus ~~précise~~ exacte, due à M. Lippmann, est la suivante: Une sphère creuse est percée d'un trou que ferme exactement un couvercle de même métal, auquel est suspendue une boule de métal par un fil isolant. On introduit la boule électrisée, on lui fait toucher la sphère, on la retire: elle n'est plus électrisée, et la sphère l'est.

Cette propriété des conducteurs est très-importante car elle établit la vérité rigoureuse de la loi de Coulomb. C'est en effet de cette loi qu'on a déduit la constance du potentiel à l'intérieur d'une couche électrique, et on a vu qu'aucune autre loi n'est compatible avec cette constance (p. 61.) On a vérifié cette propriété avec les instruments les plus précis, et l'on n'a jamais trouvé trace d'électricité à l'intérieur d'un conducteur. Cela prouve que la loi de Coulomb est exacte, même

pour les distances extrêmement petites qui figurent dans nos calculs, et qui échappent à l'expérience. Ce fait confirme donc la loi de Coulomb avec bien plus de ~~exactit~~ précision que les expériences directes.

D'autres expériences ne la vérifient qu'approximativement. Telle est celle de Coulomb lui-même : dans une sphère creuse percée d'un petit trou, il introduisait une petite boule électrisée : elle se déchargeait presque entièrement, avec une approximation bien supérieure à la portion de la surface de la sphère laissée vide. D'ailleurs, M. Robin a calculé exactement la distribution d'électricité sur une telle sphère, et même, en général, sur une surface percée d'une multitude de trous (comme une écumoire). Cette distribution ne diffère sensiblement de la distribution uniforme sur une sphère pleine qu'au bord du trou.

7e leçon.

De ce que le potentiel est constant à l'intérieur d'un conducteur, il résulte que sa surface est une surface équipotentielle. Par conséquent, la force électrique en un point quelconque de la surface lui est normale. Il est facile de calculer sa valeur.

Nous savons que, pour une surface électrisée quelconque,

μ étant la densité superficielle en chaque point, la variation de la composante normale de la force en ce point est égale à : $4\pi k\mu$
et que la composante tangentielle ne varie pas. La force étant normale à la surface d'un conducteur en équilibre électrique, elle varie de cette quantité ; et puisqu'elle est nulle à l'intérieur, elle doit avoir à l'extérieur la valeur : $4\pi k\mu$.

On peut trouver directement cette valeur sans invoquer les propriétés d'une surface électrisée, en se servant des propriétés du flux de force. On sait que le flux de force qui traverse une surface fermée contenant des masses électriques m est : $4\pi k\Sigma m$.

Prenons un point P de la surface électrisée : entourons-le d'un cylindre infiniment petit normal à la surface, et par suite parallèle à la direction des forces ; c'est ce qu'on appelle un tube de force.

C D A P B E

Fermons ce cylindre à l'extérieur par une surface de niveau infiniment voisine ; à l'intérieur, par une surface quelconque. Nous allons calculer le flux de force qui traverse cette surface fermée. Pour la portion intérieure AEB, le flux de force est nul ; pour la surface cylindrique latérale,

AC, BD, il est encore nul, puisqu'elle est parallèle aux forces. Enfin pour l'aire CD, infiniment voisine de l'élément AB, elle lui est égale à un infiniment petit près : ce sera <u>ds</u>. La force qui s'exerce sur l'élément CD est aussi égale à celle qui s'exerce aup. P extérieurement au conducteur : soit F. Le flux de force est donc : $F\,ds$ $(\cos\alpha = 1.)$ D'autre part, il est égal à la masse électrique contenue dans la surface multipliée par $4\pi k$; c'est donc : $4\pi k\mu\, ds$.
Égalant ces 2 expressions du flux de force, on trouve :

$$F = 4\pi k\mu . \qquad c.q.f.d.$$

Considérons maintenant un champ électrique contenant plusieurs conducteurs. A l'intérieur de chacun d'eux, le potentiel est constant et la force nulle. Dans chacun d'eux, le potentiel est un maximum ou un minimum.

En effet, si la force à la surface du conducteur A est positive (répulsive, donc dirigée vers l'extérieur), $\frac{dV}{dn}$ est négatif, donc le potentiel décroît tout autour du conducteur. Si au contraire la force était négative, le potentiel croîtrait tout autour du conducteur.

Si l'on découpe sur la surface du conducteur A un élément <u>ds</u>, les lignes de force qui le traversent composent

un tube de force. Il se peut que ce tube ~~rencontre~~ un autre conducteur B (normalement). Soit ds' l'élément qu'il découpe sur sa surface. On va prouver que les charges des éléments ds et ds' sont égales et de signe contraire.

Considérons en effet la surface fermée composée du tube de force et de 2 surfaces quelconques menées à l'intérieur des 2 conducteurs. Le flux de force qui traverse cette surface est nul: car aucune force ne traverse ~~le~~ tube, ni les surfaces qui le terminent.

ds A ds' B

(la surface latérale du) D'autre part, les masses électriques que contient la surface fermée sont μds, $\mu' ds'$. On a donc:

$$\mu ds + \mu' ds' = 0 . \quad \text{c. q. f. d.}$$

Cette propriété est très importante pour l'étude d'un champ électrique entre des conducteurs. Un tube de force issu d'un conducteur ~~ne peut aller q~~ électrisé ne peut aboutir qu'à un conducteur chargé de l'électricité contraire, et délimite sur le second une charge égale à celle qu'il ~~du pre~~ délimite sur le premier, de sorte que sa section est en raison inverse de la densité électrique.

On peut prouver, en outre, qu'un tube de force issu d'un conducteur ne peut jamais aboutir au même conducteur (lors même

que celui-ci serait électrisé en sens contraire suivant ses parties.) En effet, le potentiel varie toujours dans le même sens tout le long d'un tube de force. On ne peut donc jamais en suivant un tube de force, revenir à la même valeur du potentiel, ni par suite à la même surface électrisée.

Ainsi, dans un milieu diélectrique unique et homogène, ou bien un tube de force s'en va à l'infini, ou bien il rencontre un autre conducteur, de charge contraire à celui dont il part.

L'hypothèse de Maxwell sur la déformation du fluide électrique rend fort bien compte de ces lois : la quantité de fluide qui manque sur un conducteur se retrouve exactement sur un autre, comme si le fluide s'était simplement déplacé suivant le tube de force.

Le problème général de l'Electrostatique est celui-ci : Etant donné un espace contenant divers conducteurs, dont quelques-uns au moins possèdent une charge totale positive ou négative ; ils déterminent un champ électrique tel que le potentiel est constant à l'intérieur de tous les conducteurs. Trouver la distribution de l'électricité à leur surface, c.à.d. la densité électrique en chaque point de leur surface.

Ainsi posé dans sa généralité, le problème est insoluble

dans l'état actuel de l'Analyse. On ne peut le résoudre que dans des cas très particuliers et très simples et encore souvent au moyen d'artifices de calcul.

~~Dans~~ Le cas le plus simple est celui d'une sphère conductrice seule; par raison de symétrie, la densité est constante à sa surface de sorte qu'on a :

$$M = 4\pi R^2 \mu$$

et le potentiel à l'intérieur est :

$$V = \frac{M}{R} = 4\pi R \mu$$

Etudions ensuite le cas d'un ellipsoïde conducteur seul. Considérons un ellipsoïde concentrique et homothétique infiniment voisin et à l'intérieur du premier. Imaginons l'intervalle des deux surfaces rempli d'une masse homogène (matérielle ou électrique.) On va démontrer que l'action de cette ~~masse~~ couche sur un point intérieur quelconque P est nulle.

Par le point P menons un cône infiniment petit d'angle solide ω. Il découpe dans la couche 2 éléments de volume ABCD, EFGH. Evaluons leur action respective sur le point P.

Si du point P comme centres on décrit des sphères passant

par A et C, le cône interceptera sur ces sphères les éléments de surface AB' et CD'. Les 2 éléments de volume ABCD, AB'CD' seront équivalents. En effet, soit ds l'élément AB, $d\sigma$ l'élément AB', et α leur angle; on a:

$$d\sigma = ds \cos\alpha.$$

D'autre part, la longueur de la normale commune aux 2 ellipsoïdes est: $dn = dr \cos\alpha$

Or le volume ABCD a pour mesure: $ds . dn$;
le volume AB'CD' a pour mesure: $d\sigma . dr$;
ils sont donc égaux, et l'on peut exprimer le premier par: $d\sigma . dr = r^2 \omega dr$.

Or il faut remarquer que les 2 segments AC et FH découpés sur un même rayon vecteur par les 2 ellipsoïdes sont égaux. En effet, les 2 ellipsoïdes étant homothétiques, les 2 cordes parallèles AF et CH ont même diamètre conjugué, et ce diamètre les partage en 2 parties égales. Comme leurs milieux coïncident, AC et FH sont les différences de leurs moitiés, donc égales: $dr = dr'$.

Cela posé, la masse contenue dans l'élément ABCD est:

$$\rho r^2 \omega dr$$

et son action sur le point P sera:

$$\frac{\rho r^2 \omega dr}{r^2} = \rho \omega dr.$$

De même, l'action de l'élément opposé EFGH sera

dirigée en sens contraire et égale à :

$$\rho\omega dr' = \rho\omega dr.$$

~~Ainsi~~ Par conséquent les forces exercées par les éléments opposés de la couche se détruisent mutuellement, de sorte que l'action totale est nulle, c. q. f. d.

Ainsi il suffit, pour représenter la distribution de l'électricité à la surface d'un ellipsoïde, d'admettre qu'en chaque point la densité est proportionnelle à la distance normale d'un ellipsoïde (concentrique et homothétique) infiniment voisin.

En particulier, il est facile de trouver les densités aux extrémités des 3 axes. La normale se confondant en ces points avec les ~~ray~~ axes, la distance normale est ~~prop~~ égale à la différence des axes ; or les axes étant proportionnels, leur différence leur est proportionnelle. La densité électrique à l'extrémité des axes est donc proportionnelle à leurs longueurs : a, b, c.

On sait que plus un axe d'ellipsoïde est long, plus la courbure est prononcée à son extrémité. On en conclut, par une induction, que la densité électrique à la surface d'un conducteur augmente avec la courbure. Par suite, sur les arêtes et sur les pointes (où la courbure est théoriquement infinie) la densité doit être incomparablement plus grande qu'ailleurs.

Par exemple, une surface elliptique peut être considérée comme un cas-limite de l'ellipsoïde. On voit aisément que la densité sur le pourtour doit être infinie par rapport à la densité au centre (qui correspond à un axe nul.) Néanmoins, si l'on trace ~~mène~~ une ligne intérieure infiniment voisine du contour extérieur, on trouve que la charge de la surface annulaire est infiniment petite par rapport à la charge totale, ce qui prouve que la densité décroît très vite à l'intérieur. Ces résultats s'appliquent sensiblement à une plaque conductrice très mince, elliptique ou circulaire.

Lorsqu'un conducteur est à un potentiel élevé, il éprouve une déperdition intense et surtout aux points où la densité est la plus forte. C'est pourquoi l'on donne à ces conducteurs des formes arrondies (cylindriques et sphériques.) Les conducteurs destinés à de faibles potentiels ne sont pas exposés à la déperdition ; aussi l'on peut négliger pour eux ces précautions et admettre des arêtes vives (par exemple dans l'électromètre absolu.)

Si restreintes que soient les ressources de l'Analyse, elle fournit le moyen de calculer la distribution de l'électricité sur une infinité de surfaces qu'on peut concevoir à volonté. Seulement ces surfaces sont en général bien différentes de celles dont on fait usage dans la pratique. Toutefois, elles

permettent d'évaluer approximativement la distribution sur les surfaces qui s'en rapprochent le plus, au moins par une certaine partie.

On imagine à cet effet un système quelconque de masses électriques, discontinues ou continues; on calcule $\Sigma \frac{km}{r}$ et l'on cherche les surfaces sur lesquelles cette somme est constante; ce sont les surfaces équipotentielles du champ produit par les masses considérées. On prend une de ces surfaces et on y distribue les densités électriques suivant la loi: $4\pi k\mu = -\frac{dV}{dn}$.

On supprime alors les masses électriques imaginées seulement pour définir la surface. On va prouver que la charge ainsi distribuée est en équilibre.

La charge exerce sur la surface la même force que les masses électriques imaginaires, ~~donc~~ à savoir $4\pi k\mu$. Or puisque la force varie de $4\pi k\mu$ quand on passe de l'extérieur à l'intérieur de la surface, elle est nulle en tout point intérieur infiniment voisin. On démontre que dans ce cas elle est nulle dans tout l'intérieur. La force étant nulle à l'intérieur du conducteur, la charge est en équilibre, c. q. f. d.

Exemple: Pour une seule masse intérieure m au point P, les surfaces de niveau sont déterminées par

l'équation : $\frac{km}{r} = C^{te}$, c.à.d. $r = Const^{te}$
Ce sont les sphères de centre P. La force sur l'une d'elles est :
$$-\frac{dV}{dr} = \frac{km}{r^2}$$
On en tire la loi de distribution (correspondant à l'équilibre) :
$$4\pi k\mu = \frac{km}{r^2} \qquad \mu = \frac{m}{4\pi r^2}$$
μ étant constante, la distribution est uniforme. On voit de plus que la masse totale de la charge superficielle est égale à la masse unique m imaginée au centre :
$$m = 4\pi r^2 . \mu .$$

Dans le cas où il y a des masses électriques tant à l'extérieur qu'à l'intérieur de la surface équipotentielle, si l'on détermine toujours la distribution par l'équation :
$$4\pi k\mu = -\frac{dV}{dn},$$
la charge ainsi distribuée sera en équilibre si l'on supprime seulement les masses intérieures et que l'on conserve les masses extérieures.

Ce théorème permet de traiter le problème de la distribution de l'électricité dans les phénomènes d'influence.

Exemple. Dans le cas de deux points A et B électrisés en sens contraire, de charges $+m$ et $-m'$, il y a, parmi les surfaces équipotentielles, une sphère qui entoure ~~excentriquement~~ la charge la plus petite en valeur absolue : et elle correspond au potentiel nul :

$$V = \Sigma \frac{m}{r} = \frac{m}{r} - \frac{m'}{r'} = 0$$

d'où l'on tire:

$$\frac{r'}{r} = \frac{m'}{m} = C^{te}$$

équation de ladite sphère.

Si l'on calcule la densité de la couche distribuée sur la sphère suivant la loi: $4\pi k\mu = -\frac{dV}{dn}$, on trouve qu'elle est négative et en raison inverse du cube de la distance à l'un quelconque des 2 points (r ou r')

Ces résultats sont susceptibles d'une application pratique. Une sphère conductrice communiquant avec le sol est au potentiel zéro. Si on la soumet à l'influence d'un point extérieur A portant une charge m, la distribution précédente sera en équilibre sous l'influence de cette masse, c.à.d. que la présence de cette masse produit précisément cette distribution.

Si l'on calcule la charge totale de la sphère, on trouve:

$$\int \mu ds = -m'.$$

Ainsi cette charge est justement égale à celle du point (imaginaire) B intérieur à la sphère (elle est toujours plus petite que m en valeur absolue & de signe contraire.)

Le point B situé à l'intérieur de la sphère, et tel que le rapport des distances d'un point de la surface sphérique aux 2 p. A et B soit constant, s'appelle par conséquent

l'image électrique ~~de la sphère~~ du point A par rapport à la sphère.

La considération des images électriques, inventée par lord Kelvin, permet de résoudre un grand nombre de problèmes de Electrostatique.

Nous allons étudier la distribution de l'électricité dans un cas particulier d'influence.

Considérons un conducteur creux complètement fermé; ses surfaces intérieure et extérieure n'ont aucun point commun. Si dans l'intérieur se trouvent des corps quelconques ayant une charge totale Σm, il doit exister sur la surface intérieure du conducteur creux une quantité d'électricité égale et de signe contraire, qui lui fasse équilibre. On conçoit en effet que tous les tubes de force issus des corps intérieurs, ou bien vont de l'un à l'autre, et alors correspondent à des charges égales et contraires qui s'annulent dans Σm, ou bien aboutissent à la surface intérieure, qui se trouve portée des charges égales et contraires aux charges des corps intérieurs. D'ailleurs, on peut le démontrer en imaginant une surface fermée située entièrement dans l'épaisseur du conducteur (entre ses surfaces extérieure et intérieure.) Etant à l'intérieur d'un corps conducteur, le flux de force qui la traverse est nul.

Or, si M est la charge de la surface intérieure du conducteur,
ce flux de force total est : $4\pi k (\Sigma m + M)$
On en conclut $(4\pi k \gtrless 0)$ que :

$$\Sigma m + M = 0 \quad \text{ou} : \quad M = -\Sigma m \quad \text{c.q.f.d}$$

Si le conducteur creux communique avec le sol, il sera au potentiel zéro, et ne manifestera aucune charge, bien qu'électrisé sur sa face interne.

Si au contraire il est isolé, il pourra y avoir de l'électricité sur sa face externe, car l'influence des corps qu'il contient développe en lui des quantités égales d'électricité contraire (dont la somme algébrique est nulle.) La surface extérieure aura donc une charge égale à $+\Sigma m$. Ainsi le conducteur aura en apparence la même charge que l'ensemble des corps qu'il contient.

Si l'on met sa surface extérieure en communication avec le sol, il paraîtra déchargé ; mais si l'on en retire les corps, on constate qu'ils ont une certaine charge, positive par exemple, et en même temps le conducteur manifeste une charge négative (expérience avec la boule creuse de M. Lippmann.)

Ainsi le champ situé à l'intérieur d'un conducteur est absolument indépendant du champ extérieur (en effet, ils n'ont aucun point commun & aucune communication)

C'est la propriété utilisée dans la cage de Faraday et en général dans les écrans électriques. Un conducteur fermé isole complètement les corps intérieurs des actions électriques extérieures et les corps extérieurs des actions électriques intérieures. Pour soustraire un corps à toute action électrique, il suffit de l'envelopper d'une surface conductrice (caisse de métal, feuilles d'étain, etc.)

Quand un conducteur est incomplètement fermé, il ne constitue qu'un écran imparfait, mais très suffisant encore dans la pratique. Tel est le cas de la cage de Faraday.

8e leçon

Coulomb le premier a étudié expérimentalement la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs.

Supposons qu'on recouvre une petite surface AB d'un conducteur avec un petit conducteur qui s'y applique exactement (porté par un manche isolant). Le corps d'épreuve se chargera de l'électricité de la surface AB. Si on le détache d'un seul coup, et qu'on le mette dans la balance de Coulomb à la place de la boule fixe, on pourra mesurer sa charge et par suite celle de la surface AB. On peut opérer de même sur une autre portion MN de la surface du conducteur (de même

aire), au moyen d'un autre corps d'épreuve qui en épouse la forme. On le portera dans la balance de Coulomb, la boule mobile ayant la même charge qu'auparavant, on amènera l'angle d'écart à être le même; les deux charges successivement mesurées seront proportionnelles à l'angle de torsion du fil dans les deux expériences. On ~~peut~~ aura ainsi le rapport des densités des deux éléments de surface AB et MN (de même aire)

Seulement cette méthode est impraticable, parce qu'on ne peut pas avoir autant de corps d'épreuve qu'il y a de courbures de surface. On est obligé de se contenter d'une approximation. Si l'on prend pour corps d'épreuve un petit disque plan, il s'appliquera à peu près sur la surface courbe AB et sa charge sera à peu près égale à celle de AB; de même, elle sera à peu près égale à celle de MN. Le rapport des charges du plan d'épreuve serait égal à celui des charges des surfaces ~~touchées~~ AB et MN, et la méthode serait rigoureuse, si la charge du disque était proportionnelle à celle des surfaces touchées, quelle que soit leur courbure. Or cela est vrai quand tous les rayons de courbure de la surface du conducteur sont suffisamment grands.

Au lieu d'un disque plan, on peut encore employer une sphère ou un hémisphère (la surface plane servant au contact),

pourvu que leur rayon soit très petit par rapport aux rayons de courbure de la surface.

Coulomb a étudié au moyen du plan d'épreuve la distribution à la surface d'un ellipsoïde. Il a trouvé que les densités à l'extrémité des axes étaient proportionnelles à ces axes, sans connaître la déduction théorique de cette propriété, fondée sur la loi de Coulomb. Il a ainsi vérifié sans s'en douter sa propre loi.

Une difficulté de cette méthode est que le corps d'épreuve étant très petit (et il le faut pour qu'il n'enlève au conducteur qu'une fraction négligeable de sa charge), on doit fortement électriser le conducteur, pour que la charge du corps d'épreuve soit sensible, et alors il se produit une déperdition notable.

Pour éliminer l'influence de la déperdition, Coulomb employait la méthode des contacts alternés. On touche le point A au temps 0, le point B au temps t, puis de nouveau le point A au temps $2t$, en mesurant chaque fois la charge du corps d'épreuve. On prend la moyenne des deux charges prises au point A pour la comparer à la charge du point B. En effet, si la déperdition n'est pas trop rapide, elle est proportionnelle au temps, et alors la moyenne correspond à la charge de A au temps t.

Coulomb a étudié un cas de distribution beaucoup plus compliqué, celui de 2 sphères qui se touchent. Lord Kelvin a retrouvé par le calcul les résultats expérimentaux obtenus par Coulomb (au moyen des images électriques.) C'est encore une belle confirmation de la loi de Coulomb.

Relation entre la charge et le potentiel.

Dans le cas d'un seul conducteur A, soit M sa charge et V son potentiel ; on a : $M = CV$

On va démontrer que le coefficient C est constant.

Soit P un point intérieur ; le potentiel en ce point est :

$$V = \int \frac{\mu ds}{r}$$

Multiplions toutes les densités μ par un même facteur a :

$$V' = \int \frac{a\mu ds}{r} = a\int \frac{\mu ds}{r} = aV$$

D'autre part, la charge primitive est : $M = \int \mu ds$,

et la nouvelle charge : $M' = \int a\mu ds = a\int \mu ds = aM$.

Donc la charge est proportionnelle au potentiel, c.q.f.d.

La constante C s'appelle capacité électrique du conducteur.

La capacité est la charge qui correspond au potentiel 1.

On peut calculer la capacité d'un conducteur quand on connaît la distribution que prend l'électricité à sa surface quand il est seul.

Dans le cas d'une sphère homogène, le potentiel V en un point intérieur est le même qu'au centre :

$$V = \int \frac{\mu ds}{R} = \frac{1}{R}\int \mu ds = \frac{M}{R}.$$

où:

$$M = RV.$$

Ainsi la capacité d'une sphère est égale (Sy. El. St.) ou proportionnelle (Sy. El. Mg.) au rayon. (Paradoxe, si l'on assimilait la capacité électrique au vol. ou à la surf.)

Considérons maintenant un champ électrique contenant plusieurs conducteurs A, B, C, ... dont les charges sont $M, M', M'', \dots$ et les potentiels $V, V', V'', \dots$

Le potentiel V en un point P intérieur de A est la somme des potentiels qui proviennent des actions de A, B, C.... sur le point P. Soient $\mu, \mu', \mu'', \dots$ les densités de ces conducteurs, $r, r', r'', \dots$ les distances du point P à des points pris sur la surface de chacun de ces conducteurs. On aura:

$$V = \int \frac{\mu ds}{r} + \int \frac{\mu' ds'}{r'} + \int \frac{\mu'' ds''}{r''} + \dots$$

Si l'on multiplie toutes les densités $\mu, \mu', \mu'', \dots$ par un même facteur $\underline{a}$, l'équilibre des charges subsiste, et le potentiel prend une nouvelle valeur:

$$V_1^* = \int \frac{a\mu ds}{r} + \int \frac{a\mu' ds'}{r''} + \int \frac{a\mu'' ds''}{r''} + \dots = aV.$$

D'autre part, il est évident que toutes les charges sont aussi multipliées par $\underline{a}$. Donc la charge et le potentiel sont encore proportionnels.[1] Soit $\underline{c}$ le coefficient de proportionnalité relatif à M, c' relatif à M', c'' relatif à M'', ... on a:

$$V = cM + c'M' + c''M'' + \dots$$

(1) Voir addition, p. 105.

Ainsi le potentiel d'un corps faisant partie d'un système de conducteurs est une fonction linéaire des charges de tous les conducteurs.

On trouve de la même manière l'expression des autres potentiels, de sorte qu'on a le système d'équations :

$$(1) \begin{cases} V = cM + c'M' + c''M'' + \dots \\ V' = c_1 M + c_1' M' + c_1'' M'' + \dots \\ V'' = c_2 M + c_2' M' + c_2'' M'' + \dots \end{cases}$$

Si l'on résout ce système par rapport aux charges on trouve :

$$(2) \begin{cases} M = CV + C'V' + C''V'' + \dots \\ M' = C_1 V + C_1' V' + C_1'' V'' + \dots \\ M'' = C_2 V + C_2' V' + C_2'' V'' + \dots \end{cases}$$

Ainsi les charges des différents conducteurs sont à leur tour des fonctions linéaires des potentiels de tous les conducteurs.

On voit que la charge d'un conducteur ne dépend pas seulement de sa capacité propre : un corps qui fait partie d'un système de n conducteurs a n capacités électriques qui dépendent des dimensions et de la position des autres conducteurs.

Le problème des capacités équivaut au problème de la distribution ; il se résout de la même manière et dans les mêmes cas.

Un cas particulier intéressant est celui où tous les conducteurs sauf un (A) sont au potentiel zéro. On a simplement :

$$M = CV$$

Ainsi la charge du corps est alors proportionnelle à son propre potentiel. Seulement le facteur C dépend des autres conducteurs; leur présence a pour effet de modifier la capacité électrique du conducteur A.

De même, si tous les conducteurs sauf un (A) ont des charges nulles, on a la relation aussi simple:

$$V = cM.$$

Dans la pratique, on emploie surtout le système de 2 conducteurs, qu'on appelle un <u>condensateur</u>

Le cas le plus remarquable est celui où les 2 conducteurs ont leurs surfaces très voisines. On peut supposer, ou bien que l'un est creux et l'autre est contenu dans le premier; ou bien que tous deux sont des lames très-rapprochées.

Dans le premier cas, on peut calculer la distribution en considérant les 2 conducteurs comme infiniment voisins. Supposons que le conducteur intérieur A est au potentiel V, et le conducteur extérieur B, qui l'enveloppe entièrement, au potentiel 0 (en communication avec le sol.) Les 2 surfaces en regard (surf. ext. de A, surf. interne de B) s'appellent les <u>armatures</u> du condensateur. En considérant les tubes de force qui vont de l'un à l'autre, on a la relation générale:

$$\mu ds + \mu' ds' = 0.$$

Mais, comme nous supposons les armatures infiniment rapprochées, on a (à des infiniment petits près):

$$ds = ds', \qquad \text{d'où :} \qquad \mu = -\mu'.$$

Ainsi les charges des 2 armatures sont égales et contraires. Reste à trouver leur grandeur absolue. Soit un point P dans l'intervalle des 2 armatures; il est soumis à une force (de la part de A):

$$4\pi k\mu = -\frac{dV}{dn}$$

Les armatures étant infiniment voisines on peut confondre dV et ΔV, dn et Δn: or $\Delta V = -V$,

donc:

$$4\pi k\mu = \frac{V}{\Delta n}$$

V étant constant, la densité μ est en raison inverse de Δn, c.à d. de la distance normale des 2 armatures.

En particulier, si les 2 armatures sont parallèles ($\Delta n = C^{te}$) la densité μ sera partout la même (quelle que soit la courbure)

Ainsi la densité ne dépend plus de la courbure du conducteur, mais seulement de la distance des 2 armatures.

Si les armatures sont 2 ellipsoïdes concentriques et homothétiques, leur charge sera <u>en raison inverse</u> des longueurs des axes. (cf. p. 84.)

Quand les 2 armatures sont parallèles, la charge de l'une d'elles est:

$$M = \int \mu\, dS = \mu \int dS = \mu S.$$

Ainsi la charge est proportionnelle à la surface. D'autre part, la constante μ a pour valeur: $\dfrac{V}{4\pi k \Delta n}$

Appelons d la distance constante Δr des 2 armatures :

$$\mu = \frac{V}{4\pi k d} \qquad M = \frac{SV}{4\pi k d}.$$

~~Ainsi~~ Donc la capacité électrique d'une des armatures est :

$$C = \frac{S}{4\pi k d},$$

ou, dans le Sy. Et. St. (où l'on fait $k = 1$),

$$C = \frac{S}{4\pi d}.$$

Ainsi la capacité est proportionnelle à la surface et en raison inverse de la distance des armatures.

Supposons maintenant que le conducteur extérieur B est au potentiel V'. On a toujours les relations :

$$\mu = -\mu' \qquad F = 4\pi k\mu = -\frac{dV}{dr}.$$

Seulement, on a alors : $\Delta V = V' - V$; d'où :

$$4\pi k\mu = \frac{V - V'}{d}.$$

$$M = \mu S \qquad \text{donc :} \qquad M = \frac{S}{4\pi k} \cdot \frac{V - V'}{d} \quad (1)$$

On voit que dans ce cas la charge est proportionnelle à la différence des potentiels. En particulier, si les 2 conducteurs ont le même potentiel ($V = V'$) la charge est nulle : en effet, ils sont alors identiques à un conducteur unique (potentiel constant à l'intérieur) et toute la charge se porte sur la surface extérieure.

Puisque les charges des 2 armatures infiniment voisines sont égales et contraires, leur potentiel sur un point

(1) Et par conséquent : $C = \dfrac{M}{V - V'} = \dfrac{S}{4\pi k d}$.

quelconque est nul. Aussi le potentiel V' du conducteur extérieur est-il dû uniquement à la charge de sa surface externe. Cette charge, dite libre, est donc égale à celle qui donnerait à ce corps le potentiel V', s'il était seul. Elle n'a aucun intérêt dans l'emploi du condensateur, car une fois les charges des armatures réunies, la charge libre subsiste.

D'ailleurs, elle est absolument négligeable par rapport aux charges condensées sur les armatures.

En effet, soit μ_1 la densité sur la surface externe. En un point P intérieur au conducteur B, le potentiel dû aux charges condensées est presque nul, car ses distances aux 2 armatures sont presque égales. Donc son potentiel V' provient uniquement de la charge extérieure de densité μ_1.

D'autre part, le potentiel V du conducteur A (ou la différence des 2 potentiels : $V - V'$) est dû à la somme algébrique des actions des armatures sur un point intérieur de A : et comme ses distances aux 2 armatures sont presque égales, il faut que les charges μ et μ' soient infiniment grandes par rapport à la charge μ_1 qui produit le potentiel V_1.

En d'autres termes, la charge libre est infiniment petite

par rapport aux charges condensées. C'est ce qu'on vérifie au moyen de l'électroscope condensateur.

On le vérifie aussi au moyen du condensateur à plateaux mobiles d'Épinus ; chacun des plateaux est muni d'un pendule qui accuse la charge libre. Si, les plateaux étant rapprochés, on charge le condensateur, puis qu'on écarte les plateaux, les pendules divergent.

Expérience de la décharge alternative.

On peut expliquer ce fait par le calcul. Le plateau A est mis en communication avec la machine, le plateau B avec le sol. A est au potentiel V, B au potentiel 0. Soit m la charge (positive) de A, m' la charge (négative) de B. On a les équations linéaires :

$$1 \quad \begin{cases} V = am + a'm' \\ 0 = bm + b'm' \end{cases}$$

Isolons B, mettons A au sol : sa charge diminue, devient m_1 ; son potentiel devient 0. Une partie de la charge de B devient libre et produit le potentiel V' ; on a donc les éq. :

$$2 \quad \begin{cases} 0 = am_1 + a'm' \\ V' = bm_1 + b'm' \end{cases}$$

Connaissant les coefficients constants de ces équations, on tire m_1 de la 1re et par suite V' de la seconde. On a en même temps la perte de charge de A : $m - m_1$.

Isolant A et déchargeant B de sa charge libre, la charge devient m'_1, son potentiel 0, celui de A, V_1 :

$$3\begin{cases} V_1 = am_1 + a'm'_1 \\ 0 = bm_1 + b'm'_1 \end{cases}$$

On tire m'_1 de la 2e éq. et V_1 de la première.
On peut continuer ainsi indéfiniment : car l'on trouve que les charges et les potentiels décroissent en progression géométrique.

— Nous allons maintenant calculer la distribution dans un condensateur du second genre c.à.d. plan.
Nous supposerons les plateaux infinis, afin de n'avoir pas à tenir compte des bords et de pouvoir considérer leur charge comme uniforme. Dans la pratique on fait des plateaux très grands par rapport à leur distance et pour éviter l'accumulation de la charge sur les bords, on les découpe circulairement de manière à détacher une bande annulaire qui les entoure.

On a toujours (ici les surfaces correspondantes des armatures sont rigoureusement égales) : $\mu = -\mu'$.

La force est. $F = 4\pi k\mu = -\frac{dV}{dn}$

$dV = \Delta v$, différence des potentiels V et V' des 2 plateaux, $dn = d$, distance des 2 plateaux. Donc :

$$4\pi k\mu = \frac{V-V'}{d}.$$

Nous avons supposé que les plateaux sont infiniment voisins; mais on peut démontrer que ce résultat est général, quelle que soit d, et prouver rigoureusement l'égalité :
$$-\frac{dV}{dx} = \frac{V-V'}{d}.$$
Pour cela, considérons d'abord un plateau circulaire revêtu d'une charge uniforme de densité μ, et calculons la force qu'il exerce sur un point A situé à la distance $\underline{a}$ sur la normale au centre. Du sommet A menons un cône infiniment petit d'ouverture ω, qui intercepte sur le plateau un élément de surface ds.
La ~~charge~~ force que cet élément exerce sur le point A à la distance $\underline{r}$ est :
$$dF = \frac{k\mu\, ds}{r^2}.$$
La résultante sera, par raison de symétrie, dirigée suivant la normale. Pour obtenir la composante efficace de chacune des forces, projetons-la sur la normale, avec laquelle elle fait l'angle α :
$$X = \frac{k\mu\, ds \cos\alpha}{r^2}.$$
d'où :
$$F = \int \frac{k\mu\, ds \cos\alpha}{r^2} = k\mu \int \frac{ds \cos\alpha}{r^2}.$$
Menons par l'élément ds un élément de surface sphérique $d\sigma$ de centre A : on a (cf. p. 61) :
$$d\sigma = r^2\omega \qquad d\sigma = ds \cos\alpha$$
Donc : $F = k\mu \int \frac{r^2\omega}{r^2} = k\mu \int \omega = k\mu\,\Omega$

en appelant Ω l'angle solide du cône ayant pour sommet A et pour base le plateau circulaire. Quand le point A se rapproche du plateau, Ω croît; et pour un point A infiniment voisin du plateau, Ω a pour limite 2π: on a alors:
$$F = 2\pi k \mu$$
Mais pour un plateau infini, quelle que soit la distance du point A, on a aussi: $F = 2\pi k \mu$

Considérons maintenant le condensateur formé de 2 plateaux infinis, parallèles, à une distance quelconque: leurs densités uniformes sont μ et $-\mu$. La force (attractive) exercée par l'un deux sur un point P situé entre eux sera $2\pi k\mu$; la force (répulsive) exercée par l'autre sur le même point sera $2\pi k \mu$, et dirigée dans le même sens; la force totale est donc:

$4\pi k \mu$, quelle que soit la distance du point P aux deux plateaux.

La force étant constante en grandeur et en direction entre les 2 plateaux, le potentiel varie uniformément. On peut donc écrire en toute rigueur, ΔV et Δn étant des variations finies:
$$-\frac{dV}{dn} = -\frac{\Delta V}{\Delta n} = \frac{V-V'}{d}$$
d'où l'on conclut, comme ci-dessus:
$$\mu = \frac{1}{4\pi k} \cdot \frac{V-V'}{d}.$$

Addition à la page 95:

On a seulement prouvé que le potentiel V du corps A varie proportionnellement à la charge M de ce corps (car les charges des autres corps, M', M'',... ont varié dans le même rapport.) Mais pour prouver que V est fonction linéaire de toutes ces charges et varie proportionnellement à chacune indépendamment des autres, il faut invoquer le principe de la superposition des équilibres électriques.

Supposons que, dans un 1er équilibre, le corps A ait la charge M, et que les autres corps (primitivement à l'état neutre) aient une charge nulle; que, dans un 2e équilibre, le corps B ait la charge M', et que les autres corps aient une charge nulle; que, dans un 3e équilibre, le corps C ait la charge M'', et que les autres corps aient une charge nulle; et ainsi de suite.

Dans le 1er équilibre, tous les potentiels seront proportionnels à l'unique charge M (désignons-les par l'indice 1):

$V_1 = aM \quad V_1' = bM \quad V_1'' = cM$, ... etc.

Dans le 2e équilibre, on aura de même:

$V_2 = a'M' \quad V_2' = b'M' \quad V_2'' = c'M'$, ... etc.

Dans le 3e:

$V_3 = a''M'' \quad V_3' = b''M'' \quad V_3'' = c''M''$... et ainsi de suite.

Dans le cas où tous les corps ont respectivement les charges $M, M', M'', \dots$ il y a encore équilibre, en vertu du principe; et le potentiel ~~sont~~ de chaque corps est la somme des potentiels dus à chaque masse dans chacun des équilibres; donc:

$$V = aM + a'M' + a''M'' + \dots$$
$$V' = bM + b'M' + b''M'' + \dots$$
$$V'' = cM + c'M' + c''M'' + \dots \text{ etc.}$$

9e leçon

Nous allons étudier la charge et la capacité de quelques condensateurs d'une forme particulière.

Considérons un condensateur sphérique formé de 2 surfaces sphériques concentriques de rayons quelconques R et R' (~~soient~~ $R' > R$) soient V et V' leurs potentiels.

Nous ne savons calculer la densité que dans le cas où les deux armatures sont infiniment voisines (p. 97)

Nous supposons maintenant $(R' - R)$ fini.

Par raison de symétrie, les surfaces équipotentielles entre les deux armatures sont des sphères. Considérons-en une de rayon r, et évaluons le flux de force qui la traverse.

Comme la force est normale, on a partout $\cos\alpha = 1$.

D'autre part, la force est constante, donc le flux est:

$$\int F dS = F \int dS = FS.$$

Or: $F = -\frac{dV}{dr}$ $S = 4\pi r^2$

Le flux est donc: $-4\pi r^2 \frac{dV}{dr}$

D'autre part, soit M la charge totale de l'armature interne (contenue dans la surface); on sait que le flux de force qui la traverse est égal à $4\pi k M$. On a donc l'équation: $4\pi k M = -4\pi r^2 \frac{dV}{dr}$

d'où: $dV = -kM\frac{dr}{r^2}$.

Intégrons entre les limites R et R':

$$V' - V = kM\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right).$$

Cette formule détermine M en fonction de la différence des potentiels: $M = \frac{V - V'}{k} \times \frac{RR'}{R' - R}$

La capacité de l'armature interne est:

$$C = \frac{1}{k} \cdot \frac{RR'}{R' - R}$$

On emploie volontiers des sphères comme mesure de capacité électrique, parce que leur capacité est proportionnelle à leur rayon. Mais ces sphères se trouvent toujours dans des salles à parois conductrices, communiquant avec le sol, qui composent avec elles un condensateur; et alors la capacité d'une sphère de rayon R (en supposant une salle sphérique de rayon R') n'est plus $\frac{R}{k}$, mais: $\frac{R}{k} \cdot \frac{R'}{R' - R}$ (donc plus grande.)

C'est pourquoi l'on n'emploie jamais comme étalons de capacité des conducteurs simples, mais des condensa-

teurs fermés, ~~dont~~ où les charges des armatures sont absolument indépendantes des actions extérieures (v. p. 90).

Considérons encore un condensateur cylindrique formé de 2 cylindres concentriques indéfinis, de rayons R et R'; soient V et V' leurs potentiels. On va calculer la charge de l'armature interne par unité de hauteur, M. Prenons une surface équipotentielle entre les 2 armatures: c'est un cylindre concentrique de rayon r. Le flux de force qui traverse l'unité de hauteur de cette surface est égal, d'une part, à $4\pi k M$, d'autre part à $-2\pi r \frac{dV}{dr}$; donc:

$$4\pi k M = -2\pi r \frac{dV}{dr}$$

d'où:

$$dV = -2kM \frac{dr}{r}$$

Intégrons entre les limites R et R':

$$V' - V = -2kM(\log R' - \log R) = -2kM \log \frac{R'}{R}.$$

On en tire la valeur de M:

$$M = \frac{V - V'}{2k \log \frac{R'}{R}},$$

et la capacité est:

$$C = \frac{1}{2k \log \frac{R'}{R}}.$$

Telles sont les formes les plus simples et les plus employées dans les condensateurs qui servent aux mesures.

Tension électrique ou pression électrostatique.
Considérons un conducteur chargé, et un élément AB de sa surface; nous allons déterminer à quelle force cet élément (supposé mobile) est soumis de la part du reste du conducteur (c.à.d. de la surface AMB.)

On sait que la force, en un point extérieur infiniment voisin, est $4\pi k\mu$ sur l'unité d'électricité, et qu'elle est nulle en un point intérieur. Comme elle est la somme de l'action exercée par AB et de l'action exercée par AMB, on en conclut (avec Coulomb) que ces deux actions sont égales: et puisque leur somme est $4\pi k\mu$, chacune d'elles est égale à $2\pi k\mu$. Telle est la valeur de la force exercée ~~par l'élément~~ par toute la surface AMB sur ~~un point~~ la masse 1 située sur l'élément AB. Sur la charge μds de cet élément, la force sera donc:

$$2\pi k\mu \cdot \mu ds = 2\pi k\mu^2 ds$$

Le coefficient de ds s'appelle la tension électrique ou la pression électrostatique en AB:

$$\tau = 2\pi k\mu^2.$$

C'est l'effort exercé par toute la surface électrisée sur un de ses éléments, effort rapporté à l'unité de surface. La pression électrostatique est ainsi définie d'une manière analogue à la pression hydrostatique.

On sait que la résultante des pressions hydrostatiques exercées par un liquide sur le vase est précisément égale au poids de ce liquide. De même, la résultante des pressions électrostatiques d'un conducteur est égale à la force qui sollicite ce conducteur.
Pour un ~~seul~~ conducteur seul, cette résultante est nulle, car un tel conducteur n'est soumis à aucune force.

Soit un condensateur à plateaux plans parallèles, A, B. Détachons sur le plateau B la surface S, et calculons la force exercée ~~par~~ sur S par le plateau A. Les forces étant parallèles, leur résultante est égale à leur somme. La densité uniforme à la surface du plateau est:

$$\mu = \frac{1}{4\pi k} \cdot \frac{V-V'}{d} \qquad \text{(v. p. 102)}$$

La tension électrique est:

$$\tau = 2\pi k \mu^2 = \frac{1}{8\pi k}\left(\frac{V-V'}{d}\right)^2.$$

Cette formule est très importante: elle fournit le moyen de mesurer les différences de potentiel. On met les 2 sources de potentiels différents V et V' avec les 2 plateaux, dont l'un est mobile; et la pression τ étant uniforme, la force totale est τS; on a donc:

$$F = \frac{S}{8\pi k}\left(\frac{V-V'}{d}\right)^2$$

ce qui permet de calculer $V-V'$, connaissant S, d, et F que l'on peut mesurer.

Considérons maintenant une sphère uniformément électrisée, partagée en 2 hémisphères AMB, ANB mobiles l'un par rapport à l'autre. Évaluons la force répulsive qu'chacun d'eux exerce sur l'autre.

Par raison de symétrie, la force est perpendiculaire à la base des hémisphères. Comme la pression est normale à la surface en chaque point, il suffit de calculer sa composante efficace. Sur l'élément de surface <u>ds</u>, la pression est: $2\pi k\mu^2 ds$

La composante sera: $2\pi k\mu^2 ds \cos\alpha$

D'autre part, si l'on projette l'élément ds sur le plan de base du hémisphère, en $d\sigma$, on a la relation:

$$d\sigma = ds \cos\alpha$$

Donc la composante est: $2\pi k\mu^2 d\sigma$

et la résultante: $F = 2\pi k\mu^2 \int d\sigma$

La somme des projections d'un hémisphère sur le plan de base est un grand cercle πR^2; donc:

$$F = 2\pi^2 k\mu^2 R^2$$

D'autre part le potentiel en un point de la surface sphérique est: $V = \frac{M}{R} = \frac{4\pi k R^2 \mu}{R} = 4\pi k R\mu$, (v. p. 59.)

d'où l'on tire: $\mu R = \frac{V}{4\pi k}$

Donc: $F = 2\pi^2 k \frac{V^2}{16\pi^2 k^2} = \frac{1}{8k} \times V^2$.

Cette formule très simple permet, comme la précédente,

d'évaluer les potentiels ; elle a l'avantage de dispenser de toute mesure linéaire, et de donner le potentiel en fonction de la force seule. C'est le principe d'un électromètre absolu inventé par M. Lippmann (v. p. 169)

Définition de l'énergie électrique.

Considérons un système de points électrisés, de charges $m, m', m'', \ldots$ Imprimons-lui une déformation infiniment petite, et proposons-nous d'évaluer le travail correspondant.

Envisageons d'abord un couple de points A, B, de masses m, m', à la distance r. La force que A exerce sur B (ou B sur A), est : $\frac{kmm'}{r^2}$ et le travail élémentaire de cette force :

$$d\mathcal{T} = \frac{kmm'}{r^2} dr$$

dr étant la projection du déplacement infiniment petit sur la direction de la force. On voit que :

$$d\mathcal{T} = -d\,\frac{kmm'}{r}.$$

Revenons à notre système d'un nombre quelconque de points. Le travail élémentaire total sera la somme des travaux élémentaires correspondant à chaque couple de points ; on a donc :

$$d\mathcal{T} = -d\,\Sigma\,\frac{kmm'}{r}$$

La fonction $\Sigma\,\frac{kmm'}{r}$ s'appelle énergie électrique

du système et se représente par la lettre W. On écrira :

$$d\mathcal{C} = -dW \quad \text{ou} \quad d\mathcal{C} + dW = 0.$$

Ce qui justifie ce nom d'énergie ~~électriq~~ c'est que cette fonction varie en sens inverse du travail, donc est équivalente à du travail.

Il faut bien distinguer les deux fonctions :

potentiel : $V = \Sigma \frac{km}{r}$ énergie $W = \Sigma \frac{kmm'}{r}$,

d'autant plus qu'une synonymie fâcheuse expose à les confondre. Autrefois, le potentiel s'appelait <u>fonction potentielle</u>, et l'énergie s'appelait <u>potentiel</u> ; puis, comme ce nom a été employé dans la pratique pour désigner la fonction V, on a dû récemment inventer la locution <u>énergie électrique</u> pour désigner W.

Pour évaluer W, prenons d'abord tous les termes où figure la masse <u>m</u> du point A, et mettons-la en facteur : il vient : $m \Sigma \frac{km'}{r}$.

Or $\Sigma \frac{km'}{r}$ est le potentiel V produit au point A par toutes les autres masses électriques du système. En opérant de même pour tous les autres points, on aura

$$\Sigma mV$$

mV étant le produit de la masse de chaque point par le potentiel en ce point. Mais dans cette somme, chacun des termes $\frac{kmm'}{r}$ est compté 2 fois, une fois parmi les

facteurs de m, un autre parmi les facteurs de m'.
Elle est donc égale au double de ~~potentiel~~ l'énergie.

$$\Sigma m V = 2W \qquad W = \frac{1}{2} \Sigma m V.$$

Dans le cas particulier où le système ne comprend que des corps conducteurs A, B, C, ... dont ~~les~~ potentiels (constants pour chacun) sont: $V, V', V'', \ldots$, quand on forme $\Sigma m V$, on peut mettre en facteur de V toutes les masses électriques à la surface du conducteur A, $\Sigma m = M$, charge totale de ce conducteur; on a donc:

$$W = \frac{1}{2} \Sigma M V$$

MV étant le produit de la charge de chaque conducteur par son potentiel.

Dans le cas où tous les potentiels sauf un (V) sont nuls, on a simplement:

$$W = \frac{1}{2} \, M V$$

Dans le cas où toutes les charges électriques sauf une (M) sont nulles, on a également:

$$W = \frac{1}{2} \, M V$$

Ainsi l'énergie du système, dans ces deux cas, ne dépend que de la ~~masse~~ charge et du potentiel du corps où ils ne sont pas nuls. Mais cette charge elle-même dépend, non seulement de la configuration du conducteur, mais de la forme et de la position des autres conducteurs.

car leur présence accroît la capacité du premier (càd. la valeur de M pour un potentiel donné V.)

Dans le cas général, si l'on substitue dans ΣmV les ~~vale~~ expressions des potentiels V en fonction linéaire des masses M, on obtient l'énergie sous la forme d'une fonction quadratique des charges :

$$W = \frac{1}{2} \Sigma MM'$$

Si au contraire on y substitue les expressions des masses M en fonction linéaire des potentiels V, l'énergie devient une fonction quadratique des potentiels :

$$W = \frac{1}{2} \Sigma VV'$$

Dans le cas d'un condensateur dont les armatures ont les potentiels respectifs V et O, on a :

$$W = \frac{1}{2} MV.$$

Or on sait que : $M = CV$

Donc : $W = \frac{1}{2} CV^2.$

Ou bien : $W = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{C}.$

Ainsi, si l'on compare plusieurs condensateurs au même potentiel, leur énergie est proportionnelle à leur capacité ; si au contraire ils ont même charge leur énergie est en raison inverse de leur capacité.

La définition de l'énergie fournit un nouveau moyen d'évaluer la force exercée sur un corps électrisé. Soit

en effet F la composante efficace de la force pour un déplacement infiniment petit dx ; on a :

$$d\mathcal{E} = F\,dx$$

D'où :

$$F\,dx + dW = 0$$

$$F = -\frac{dW}{dx}$$

Ainsi la force subie par un corps électrisé est égal à la dérivée de l'énergie électrique par rapport au déplacement, changée de signe.

Remarque. La définition de la force par la formule :

$$F = -\frac{dV}{dx}$$

donne la force qui s'exerce sur l'unité d'électricité placée en un point ; tandis que la nouvelle définition donne la force qui s'exerce en un point d'un conducteur électrisé, de charge connue. De plus on suppose que tous les conducteurs sont isolés, de telle sorte que leurs charges ne puissent varier.

Exemple : Nous allons calculer la force qu'exercent l'un sur l'autre les 2 plateaux d'un condensateur. Soit A au potentiel V, B au potentiel 0. L'énergie électrique du condensateur sera :

$$W = \frac{1}{2}\frac{M^2}{C}.$$

Or : $M = \mu S$, et : $C = \dfrac{S}{4\pi k e}$

e étant la distance des 2 plateaux.

$$F = -\frac{dW}{de} = -\frac{1}{2}M^2 \cdot \frac{d\left(\frac{1}{C}\right)}{de} = \frac{M^2}{2C^2}\cdot\frac{dC}{de}$$

Or:

$$\frac{M^2}{C^2} = V^2 \qquad \frac{dC}{de} = \frac{-S}{4\pi k}\cdot\frac{1}{e^2}$$

Donc:

$$F = -\frac{S}{4\pi k}\cdot\frac{V^2}{e^2}.$$

La force, étant négative, est attractive, comme on sait.

Remarque. Si l'on différentie l'énergie en supposant le potentiel constant: $W = \frac{1}{2} CV^2$, on trouve: $dW = \frac{1}{2} V^2 dC$, de sorte que si les 2 plateaux se rapprochent ($de < 0$) la capacité augmente ($dC > 0$) et le potentiel aussi. Il semble donc que, lorsque l'un des plateaux se déplace dans le sens de la force qui le sollicite, son énergie augmente, tandis qu'elle devrait diminuer, le travail de la force étant positif.

Ce paradoxe vient de ce qu'on applique à tort la formule de l'énergie à un ~~conducteur~~ système qui n'est pas isolé, car pour maintenir le plateau au même potentiel, il faut le mettre en communication avec une source d'électricité qui, elle, consomme du travail et produit de l'énergie. Or il se trouve que la source produit une somme d'énergie double de celle que gagne le condensateur, et comme elle équivaut à la somme (de celle-ci et) du travail produit,

il en résulte que celui-ci est égal à l'énergie acquise par le condensateur. C'est ce qu'on va démontrer.

La source étant au potentiel V, calculons le travail nécessaire pour ~~qu'elle produise~~ transporter une quantité M d'électricité de la source dans le condensateur. L'énergie de cette masse M ~~est le travail nécessaire~~ dans la source pour l'amener de l'infini à cette source : pour une charge 1, ce travail est V ; pour la charge M, il est MV. D'autre part, si cette charge se trouve transportée dans le condensateur, son énergie n'est plus que $\frac{1}{2}MV$. Ainsi son énergie a décru de moitié : l'autre moitié s'est dépensée en travail. Ces 2 moitiés étant égales et de même signe, on a :

$$dW = Fdx \qquad \text{ou} \qquad F = \frac{dW}{dx},$$

et voilà pourquoi la force a le même signe que la variation d'énergie du condensateur, quand on le considère comme isolé. Au contraire, quand on considère le système (vraiment isolé cette fois), du condensateur et de la source qui lui fournit l'électricité, la source perd en énergie le double de ce que le condensateur gagne, et l'on a, en vertu du principe de la conservation de l'énergie : ~~2dW~~ $dW + Fdx = 0$,

d'où $Fdx = -dW$ $\qquad F = -\frac{dW}{dx}$.

10e leçon

Nous avons vu que la formule : $F = -\frac{dW}{dx}$

est sujette à exception quand le système est en relation avec une source d'électricité, c.à.d. avec un corps ou ensemble de corps qui ont la propriété de conserver le même potentiel ou la même différence de potentiel quelles que soient leurs pertes d'électricité. Cela ne peut se faire évidemment que grâce à une dépense d'énergie.

Distinguons l'énergie totale du système et de la source, W, l'énergie du système seul W_1, et l'énergie de la source seule W_2. Par définition : $W = W_1 + W_2$.

d'où : $dW = dW_1 + dW_2$

Or l'énergie de la source, quand elle fournit la charge dM, décroît de VdM : $dW_2 = -VdM$

et l'énergie du système recevant la même charge croît de la moitié seulement : $dW_1 = \frac{1}{2} VdM$

car : $W_1 = \frac{1}{2} MV$.

Il vient : $dW = \frac{1}{2} VdM - VdM = -\frac{1}{2} VdM$.

Donc : $dW = -dW_1$

Et comme la force est en général : $-\frac{dW}{dx}$,

elle est dans ce cas : $+\frac{dW_1}{dx}$,

et par conséquent le travail : $Fdx = dW_1$,

c.à.d. de même signe que le gain d'énergie du système. Mais

aussi la perte d'énergie de la source est double du gain d'énergie du système : $-dW_2 = 2dW_1$.

Ainsi, lorsqu'un système éprouve un déplacement à potentiel constant, (en relation avec une source) son accroissement d'énergie est égal au travail électrique, et leur somme à la perte d'énergie de la source.

Du partage de l'électricité entre corps conducteurs.

Soient deux conducteurs aux potentiels V et V', et de charges M et M'. Si on les met en communication, elles deviennent M_1 et M'_1, et leur potentiel commun est x. En vertu du principe de la conservation de l'électricité, on a l'égalité :

$$M + M' = M_1 + M'_1 .$$

Considérons seulement le cas où les conducteurs sont assez éloignés pour que leur influence réciproque soit négligeable. Dans ce cas, leur capacité n'est pas altérée, et leur distribution électrique conserve la même forme. La capacité du conducteur unique formé par leur réunion est donc la somme de leurs capacités :

$$M = CV \qquad M' = C'V'$$

$$CV + C'V' = (C + C')\,x$$

Cette équation permet de calculer x quand on connaît les capacités. — Cherchons ce que devient l'énergie du système.

Avant la communication, elle est :

$$W = \frac{1}{2}(MV + M'V') = \frac{1}{2}(CV^2 + C'V'^2)$$

Après la communication, elle est :

$$\frac{1}{2}(M_1 + M'_1)x = \frac{1}{2}(C+C')x^2 = W_1$$

La variation de l'énergie est donc :

$$W - W_1 = \frac{1}{2}\left[CV^2 + C'V'^2 - \frac{(CV+C'V')^2}{C+C'}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{CC'(V^2+V'^2-2VV')}{C+C'}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{CC'(V-V')^2}{C+C'}$$

Cette expression est positive quels que soient V et V' (différents) ; il y a donc toujours perte d'énergie à moins que les potentiels soient égaux.

On démontre sans peine pour un système d'un nombre quelconque de conducteurs la formule générale :

$$W - W_1 = \frac{1}{2}\frac{\Sigma\, CC'(V-V')^2}{\Sigma C}$$

On peut se demander ce que devient l'énergie perdue. Dans les cas précédents, il y avait un travail mécanique équivalent à la perte d'énergie ; mais dans ce cas-ci il n'y en a pas. L'expérience apprend qu'il se produit de la chaleur, et que la quantité de chaleur développée est équivalente à la perte d'énergie calculée.

Les premières expériences sur la chaleur dégagée par la décharge des conducteurs sont dues au savant Suisse Riess (vers 1840) ; il a eu la chance de trouver des formules

empiriques qui ont été depuis déduites par le calcul de la théorie du potentiel.

Il employait une batterie électrique, réunion de condensateurs fermés (Dans les bouteilles de Leyde le diélectrique est du verre, au lieu de l'air que nous avons considéré dans le condensateur théorique; mais la nature du diélectrique n'intervient que par une valeur différente de la constante K.)

Soit M la charge de l'armature interne; celle de l'armature externe sera $-M$. En réunissant les 2 armatures par un conducteur (excitateur à manches de verre) on produit une décharge, c.à.d. la réunion des 2 charges égales et contraires; la charge finale est donc nulle. L'énergie primitive était

$\frac{1}{2} M (V-V')$, V et V' étant les potentiels des 2 armatures; l'énergie finale est 0. La perte d'énergie est donc égale à l'énergie initiale. Soit C la capacité électrique de l'armature interne: $M = C(V-V')$

Donc: $$W = \frac{1}{2} C (V-V')^2 = \frac{1}{2} \frac{M^2}{C}.$$

Les lois empiriques découvertes par Riess concordent avec ces formules. Pour les vérifier, il faut connaître: 1° la capacité du condensateur, au moins en valeur relative; on la considère comme proportionnelle au nombre des bouteilles (toutes égales); 2° la charge; Riess la mesurait au moyen de la bouteille de Lane;

3° la chaleur dégagée par la décharge; on la mesure au moyen du thermomètre de Riess.

La <u>bouteille de Lane</u> est une bouteille de Leyde dont l'armature externe communique avec une boule mobile qu'on peut rapprocher plus ou moins (par une vis micrométrique) d'une boule fixe portée par l'armature interne. Quand on la met en relation avec une machine électrique, une étincelle éclate entre les 2 boules quand la charge a atteint une certaine valeur et décharge les 2 armatures. Cette charge maxima de la bouteille servira de unité de mesure pour la charge de la batterie.

Pour cela, on relie la batterie à la bouteille de Lane de manière qu'elles soient disposées en <u>série</u> ou en <u>cascade</u> par rapport à la source. Si la charge intérieure de la bouteille est m, la charge extérieure sera −m; ~~elle~~ comme elle provient ~~correspond~~ d'une décomposition par influence, elle correspond à une charge +m de l'armature intérieure de la batterie, laquelle engendre à son tour une charge −m dans l'armature extérieure. En un mot, les armatures intérieures de la bouteille et de la batterie se chargent de la même quantité d'électricité. Quand la bouteille se décharge, sa charge devient nulle, mais celle de la batterie

subsiste. Autant de fois l'étincelle aura éclaté, autant de fois la batterie aura reçu la charge m, qui s'accumule à elle ~~ajoute~~ accumule

Thermomètre de Riess. C'est un ballon de verre contenant une spirale métallique (qu'on peut changer à volonté) par laquelle on fait passer la décharge de la batterie. Le fil métallique s'échauffe, et échauffe l'air du ballon (d'abord à la pression atmosphérique H.) Soit t son élévation de température; la pression devient :

$$H(1+\alpha t) \qquad \Delta H = H\alpha t.$$

Le liquide descend dans la branche inclinée de l'angle ε sur l'horizon de la longueur x (il ne monte pas sensiblement dans la branche large ouverte) Supposons H mesurée avec le même liquide:

$$x = \frac{\Delta H}{\sin\varepsilon} = \frac{H\alpha t}{\sin\varepsilon}.$$

Ainsi x est proportionnel à t; mais t est proportionnel à la quantité de chaleur dégagée dans la masse d'air, q; donc le déplacement du liquide est proportionnel à q qu'il s'agit de mesurer; et il est d'autant plus grand, pour une valeur donnée de q, que $\sin\varepsilon$ ou ε est plus petit.

Seulement, dans la pratique, l'air s'échauffe puis se refroidit brusquement, de sorte que le liquide dépasse la position d'équilibre, en vertu de la vitesse acquise, et

ne s'y arrête pas plus en remontant qu'en descendant; cette position, qui correspond à x, n'est donc pas observable. Mais si l'on observe le déplacement extrême x_1 du liquide, on peut le considérer comme proportionnel à x pour un même instrument, et par suite le prendre pour x, puisqu'il ne s'agit que de vérifier des proportionnalités.

Riess a trouvé ainsi que x est proportionnel au carré de la charge; proportionnel à la capacité pour un même potentiel; et inversement proportionnel à la capacité pour une même charge.

Ces expériences vérifient seulement la proportionnalité, et non la stricte équivalence de la chaleur et de l'énergie. Toutefois, on constate, en changeant la spirale, que la nature du conducteur est indifférente: la quantité de chaleur dégagée est toujours la même.

On peut intercaler dans le circuit de décharge plusieurs thermomètres de Riess pouvant contenir des spirales différentes. Soient d'abord 2 spirales de même métal et de même section, mais de longueurs différentes l et l'; on trouve pour les quantités de chaleur dégagées par la même décharge:

$$\frac{q}{q'} = \frac{l}{l'}$$

ce qui est presque évident. Si l'on met 2 fils de même métal, de même longueur et de sections différentes, s, s',

on trouve : $\frac{q}{q'} = \frac{s'}{s}$.

Cette loi permet de négliger la quantité de chaleur produite par la décharge dans l'excitateur et les fils conducteurs, dont la section est très grande par rapport à celle de la spirale. Enfin, si l'on emploie 2 fils de même longueur et section, mais de métaux différents, on aura : $\frac{q}{q'} = \frac{\rho}{\rho'}$
ρ étant un coefficient propre à chaque métal.

En résumé, la quantité de chaleur produite dans un fil par une même décharge est proportionnelle à $\rho \frac{l}{s}$. Cette quantité s'appelle la résistance et se désigne par R. Quant à ρ, c'est le coefficient de résistance spécifique (ou du conducteur) du métal employé. — Ces expériences nous apprennent donc que les corps conducteurs se comportent différemment à l'égard des décharges électriques.

La décharge d'un condensateur n'est pas instantanée, parce que la différence de potentiel décroissant progressivement, la vitesse se ralentit à mesure ; c'est donc un phénomène compliqué ; qui dure et fait long feu. Pour avoir un phénomène plus simple, et uniforme, il faudrait réunir par un fil conducteur deux sources tenues à des potentiels différents (et constants.) On peut concevoir théoriquement la possibilité d'un tel phénomène. Prenons un condensateur A formé de 2 cylindres pouvant

glisser l'un dans l'autre : portons l'armature interne au potentiel V, l'armature externe au potentiel 0. Prenons un autre condensateur tout semblable B, dont les armatures soient respectivement aux potentiels V' et 0. Réunissons les deux armatures internes par un fil conducteur : les potentiels V et V' tendent à s'égaliser. Pour empêcher ce fait, on retire l'armature

interne de A, sa capacité diminue, donc la charge peut diminuer, le potentiel restant constant ; inversement, on enfonce l'armature interne de B, sa capacité augmente, et sa charge augmente à potentiel constant. On peut donc maintenir les potentiels constants malgré une décharge continue d'électricité le long du fil. La vitesse à imprimer aux 2 armatures dépend de la conductibilité du fil.

Des courants continus.

Faisons abstraction du procédé pratique par lequel on obtient des sources d'électricité, et considérons un fil conducteur dont les extrémités sont maintenues aux potentiels constants V et V'. Il n'y a pas d'équilibre possible sur un tel conducteur ; l'électricité s'écoulera

donc d'une manière continue par le fil : c'est ce qu'on appelle un courant.

L'expérience montre que le potentiel varie linéairement le long du fil. Soit l sa longueur totale, x la distance d'un point quelconque du fil à son origine ; V_1 le potentiel à l'origine, V_2 le potentiel à l'extrémité ; soit V le potentiel au point x ; en le mettant en communication avec un condensateur, on mesure ce potentiel, et l'on vérifie la relation suivante :

$$\frac{V-V_1}{V_2-V_1} = \frac{x}{l} \qquad V = V_1 + \frac{x}{l}(V_2-V_1)$$

De même, si l'on met 2 points du fil en communication respectivement avec les 2 paires de quadrants de l'électromètre Mascart, on constate que la déviation de l'aiguille est proportionnelle à la distance des 2 points ; on sait d'autre part qu'elle est proportionnelle à la différence de potentiel des 2 paires de quadrants.

La force électrique a une valeur constante tout le long du fil ; en effet, la dérivée du potentiel en un point est :

$$\frac{dV}{dx} = \frac{V_2-V_1}{l} = C^{te}$$

Par suite, on a :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

et comme les autres dérivées secondes sont également nulles (la force ayant la direction du fil), on trouve :

$$\Delta V = 0.$$

Or, en vertu d'un théorème qui ne dépend pas de la forme des conducteurs ni de l'équilibre de leur charge, on a :

$$\Delta V = 4\pi k \rho$$

Donc : $\rho = 0.$

Ainsi la densité électrique est nulle le long du fil, c.à.d. qu'il n'a pas de charge libre d'électricité. Une certaine charge disparaît à une extrémité, une charge égale reparaît à l'autre ; l'électricité semble passer ~~le long~~ d'un bout à l'autre du fil, mais elle ne passe pas ; le fil semble transporter de l'électricité, mais il n'en contient pas.

Dans l'hypothèse des deux fluides, on peut rendre compte de ce fait en imaginant 2 courants égaux et contraires des 2 fluides : chaque portion du fil contenant des quantités égales des 2 fluides est comme à l'état neutre. Cette théorie peut se préciser dans l'hypothèse atomique : ~~chaque~~ les atomes d'une molécule binaire prendraient ~~une~~ des charges opposées et les transmettraient de proche en proche, de sorte qu'à chaque instant la charge de chaque molécule serait nulle. C'est ce que semble confirmer la théorie de l'électrolyse, et l'on peut admettre que ce qui est vrai des conducteurs liquides l'est aussi des conducteurs solides.

Si dans un même circuit on intercale plusieurs

conducteurs différents, le potentiel croît ou décroît linéairement dans chacun d'eux. De plus, l'expérience montre que la différence de potentiel de leurs extrémités est proportionnelle à leur résistance, de sorte qu'on a les égalités :

$$\frac{V-V_1}{R_1} = \frac{V_1-V_2}{R_2} = \frac{V_2-V_3}{R_3} = \ldots\ldots$$

La valeur de ces rapports, constante dans tout le circuit, et qui caractérise la grandeur du courant, s'appelle son intensité, et se désigne par I ; on a la formule générale :

$$\frac{V-V'}{R} = aI,$$

a étant un coefficient constant qui dépend seulement du choix des unités.

Ohm a deviné ces lois en présumant l'analogie de la conductibilité électrique avec la conductibilité calorifique ; il les a ensuite vérifiées par l'expérience. Sa découverte passa inaperçue en Allemagne, et resta inconnue en France, où elle fut refaite par Pouillet. Pour vérifier la loi d'Ohm, il suffit de mesurer les différences de potentiel par la méthode électrostatique. On constate d'ailleurs que la constante I qui caractérise le courant augmente quand croît ce que l'on appelle vulgairement l'intensité du courant.

Loi de Joule. En immergeant dans un calorimètre

des fils divers traversés par un courant, Joule trouva que la quantité de chaleur dégagée par ces fils était proportionnelle à leur résistance, au carré de l'intensité du courant et au temps pendant lequel le courant avait passé. C'est ce que résume la formule :

$$Q = bRI^2t$$

où b est un coefficient dépendant du choix des unités.

Ni Ohm ni Joule n'ont songé à vérifier le principe de la conservation de l'énergie au moyen de leurs lois.

Soit M la quantité d'électricité qu'un courant donné transporte en 1 seconde (on peut la mesurer au moyen d'un condensateur.) En t secondes, la quantité est Mt. Cette charge passant du potentiel V_1 au potentiel V_2, le travail effectué ou l'énergie perdue est :

$$W = Mt(V_1 - V_2)$$

et, si l'on admet que cette énergie reparaît sous forme de chaleur, on aura (en désignant par J l'équivalent mécanique de la chaleur) :

$$Q = \frac{W}{J} = \frac{Mt}{J}(V_1 - V_2)$$

D'autre part, si nous combinons les lois d'Ohm et de Joule, nous trouvons la formule analogue :

$$Q = \frac{bIt}{a}(V_1 - V_2)$$

Ainsi l'intensité du courant est proportionnelle à la

quantité d'électricité transportée en 1 seconde.
Pour que l'identification des 2 formules soit complète, il suffit de poser : $\frac{b}{a} I = \frac{M}{J}$.
En conséquence, on est convenu de prendre pour unités d'intensité et de résistance celles qui rendent a égal à 1, et b égal à $\frac{1}{J}$. Dans ces conditions on a : $I = M$,
c.à.d. que l'intensité d'un courant est égale à la quantité d'électricité qu'il transporte par seconde.
Avec les unités ainsi choisies, les lois d'Ohm et de Joule se traduisent par les formules simples et usuelles :

$$V_1 - V_2 = RI \qquad Q = \frac{1}{J} RI^2 t.$$

11e leçon

On introduit souvent dans la formule de la loi d'Ohm la force électromotrice E, c.à.d. le travail effectué dans la source pour produire l'unité d'électricité. Les deux extrémités du fil conducteur sont en effet réunies par une source qui a pour effet de produire la différence ou chute de potentiel $(V_1 - V_2)$. Le travail effectué pour produire la masse 1, c.à.d. pour l'élever du potentiel V_2 au potentiel V_1, est précisément $(V_1 - V_2)$. Donc :

$$E = V_1 - V_2$$

Il faut se garder de confondre la force électromotrice et la différence de potentiel. Toute différence de potentiel suppose une force électromotrice, mais quand il y a une force électromotrice, il n'y a pas toujours une différence de potentiel. La notion de force électromotrice est donc plus générale, comme on le verra dans la théorie de l'induction.

La loi d'Ohm se traduit alors sous sa forme habituelle:

$$E = RI.$$

On peut également introduire la force électromotrice dans la formule de la loi de Joule:

$$Q = \frac{1}{J} EIt = \frac{1}{J} \frac{E^2}{R} t.$$

Ces formules s'appliquent à un courant unique traversant un circuit simple, c.a.d. formé de plusieurs conducteurs mis bout à bout (en série.)

On peut se poser un problème plus complexe, en considérant un circuit multiple, formé de conducteurs ramifiés dans lesquels sont intercalées des forces électromotrices. Dans ce cas, on applique les corollaires de la loi d'Ohm, dus à Kirchhoff.

Considérons un ~~fil~~ circuit ABCDE composé de plusieurs conducteurs et contenant diverses forces électromotrices. Exprimons la différence de potentiel des 2 extrémités en fonction de l'intensité du courant, des diverses résistances

et des forces électromotrices, prises positivement ou négativement, suivant qu'elles relèvent ou abaissent le potentiel dans le sens du courant :

$$V_0 - V_1 = IR_1 \quad V_1' - V_2 = IR_2 \quad V_2 - V_3 = IR_3 \quad V_3' - V = IR_4$$

$$V_0 - V = IR_1 - E_1 + IR_2 + IR_3 - E_2 + IR_4$$

$$= \Sigma(IR - E) = \Sigma IR - \Sigma E = I\Sigma R - \Sigma E.$$

Considérons maintenant un circuit multiple ABCDEF, dans lequel sont intercalées des forces électromotrices quelconques en des points quelconques.

Prenons un sommet, A par exemple : chacun des fils qui y aboutissent est parcouru par un courant ; on considère comme positifs ceux qui apportent de l'électricité en A, comme négatifs ceux qui en emportent. Comme on suppose le régime permanent établi, le potentiel du point A est constant, donc la quantité d'électricité qu'il reçoit en 1 seconde est nulle. Cette quantité est égale à la somme algébrique des intensités des courants aboutissant à ce sommet ; d'où :

$$\Sigma I = 0$$

On aura autant d'équations de cette forme qu'il y a de sommets dans le circuit.

Prenons maintenant un circuit fermé simple, par exemple ABF. On considérera comme positifs les courants dans le sens ABF, comme négatifs les courants de sens contraire. Soient V_1 V_2 V_3 les potentiels aux 3 sommets; on aura pour la portion

AB: $V_1 - V_2 = \sum_A^B (IR - E)$

pour BF: $V_2 - V_3 = \sum_B^F (IR - E)$

pour FA: $V_3 - V_1 = \sum_F^A (IR - E)$

et pour le circuit total: $0 = \sum (IR - E)$

ou: $\sum IR = \sum E$

On obtient autant d'équations de cette forme qu'on peut former de circuits simples fermés avec des portions du circuit multiple.

Seulement toutes ces équations ne sont pas indépendantes: en effet le nombre des inconnues (I) est égal à celui des fils, tandis que le nombre des équations est la somme du nombre des sommets et du nombre des circuits simples. Par exemple, dans un circuit ramifié une fois, il y a 3 fils, 2 sommets et 3 circuits simples, donc 5 équations pour 3 inconnues. Il y en a donc 2 qui sont la conséquence des autres. En effet, les 2 sommets

donnent lieu à la même équation :

$$I = i + i'$$

De même l'équation du 3e circuit simple (par ex: ADBE) est la conséquence de celles des 2 premiers (ACBD, ACBE.)

C

I

A B

i D

i'

E

Nous avons jusqu'ici considéré les courants continus dans des fils – Mais, chaque fois que la distribution de l'électricité change dans un conducteur, il se produit des courants temporaires. Lorsqu'on met 2 conducteurs en communication par un fil, le courant qui suit le fil n'est que la résultante des courants qui sillonnent les 2 conducteurs.

Nous traiterons seulement le problème des courants continus dans les conducteurs. Pour cela nous supposons le régime permanent établi, et par suite le potentiel constant en chaque point.

Imaginons un conducteur creux et fermé, dont la surface interne S_1 est au potentiel V_1, et la surface externe S_2 au potentiel V_2. Entre ces 2 surfaces le potentiel varie d'une manière continue ; considérons la surface S de potentiel V (intermédiaire entre V_1 et V_2) La force électrique est normale à cette surface en chaque point. Détachons-en un élément ds, autour du point M, et construisons sur lui un petit cylindre normal à la

surface de hauteur dn, et terminé par une surface équipotentielle infiniment voisine $(V + dV)$. Appliquons la loi d'Ohm à ce petit conducteur : sa résistance est :

$$R = \rho \frac{l}{s} = \rho \frac{dn}{ds}$$

Donc l'intensité du courant qui le traverse est :

$$I = \frac{-dV}{\rho \frac{dn}{ds}}$$

Nous définirons l'intensité du courant au point M, rapportée à l'unité de surface, par l'équation :

$$I = \mathcal{I} ds.$$

D'où : $\mathcal{I} ds = \dfrac{-dV}{\rho\, dn} ds \qquad \mathcal{I} = -\dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{dV}{dn}.$

Or la force au point M, rapportée à l'unité d'électricité, est précisément : $F = -\dfrac{dV}{dn}$

Donc : $\mathcal{I} = \dfrac{F}{\rho}.$

Appliquons la loi de Joule au même petit conducteur. La quantité de chaleur qui y est produite est :

$$Q = \frac{1}{J} \times \frac{F^2}{\rho^2} ds^2 \times \rho \frac{dn}{ds} \times t = \frac{t}{J} \cdot \frac{F^2}{\rho} \cdot dn\, ds$$

Or $dn\, ds$ est le volume du petit cylindre, soit $d\mathfrak{v}$: donc : $Q = \dfrac{t}{J} \cdot \dfrac{F^2}{\rho} d\mathfrak{v}.$

La quantité d'énergie dissipée en 1 seconde dans cet ~~petit~~ élément du conducteur est : $dW = \dfrac{F^2}{\rho} d\mathfrak{v}.$

— Proposons-nous de déterminer la résistance totale R du conducteur, c.à.d. celle d'un fil qui, ayant la même

différence de potentiel entre ses extrémités, serait traversé par le même courant (la même quantité d'électricité par seconde.) Cette résistance est, en vertu de la loi d'Ohm:

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I}$$

Or I, intensité totale du courant, est l'intégrale de $\mathcal{I}ds$ étendue à une surface équipotentielle quelconque S:

$$I = \int \mathcal{I} ds = \int \frac{F}{\rho} ds = \frac{1}{\rho} \int F ds$$

Or $\int F ds$ est justement le flux de force $\mathcal{F}$ qui traverse la surface équipotentielle S. On a donc finalement:

$$R = \rho \frac{V_1 - V_2}{\mathcal{F}}$$

Signalons une analogie curieuse qui s'établit, par le moyen des formules, entre ce problème d'Electrodynamique et un problème tout différent de Electricité statique.

Imaginons un condensateur ayant pour armatures les surfaces S_1 et S_2, l'intervalle étant rempli par de l'air, et cherchons sa capacité C. La charge de l'armature interne étant M, on a l'équation (v. p. 99):

$$M = C(V_1 - V_2)$$

Or M est l'intégrale de la densité de l'armature: $\int \mu ds$. D'autre part, on sait (p. 78) que: $4\pi k \mu = F$. Donc:

$$M = \int \frac{F ds}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi k} \int F ds = \frac{\mathcal{F}}{4\pi k}$$

et par suite:

$$C = \frac{\mathcal{F}}{4\pi k (V_1 - V_2)}$$

Remarquons que le flux de force est le même que dans le problème précédent; multiplions membre à membre les deux formules, celle de R et celle de C:

$$RC = \frac{\rho}{4\pi k} = \text{Const.}$$

Ainsi la capacité du condensateur est en raison inverse de la résistance du conducteur homologue ~~conjugué~~. Si l'on sait calculer la capacité d'un condensateur, on connaîtra par là même la résistance d'un conducteur (de matière déterminée, ayant une résistance spécifique ρ) qui remplirait l'intervalle des deux armatures.

Exemple: On sait que la capacité d'un condensateur sphérique, dont les armatures ont les rayons r_1 et r_2, est:

$$C = \frac{1}{k}\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \qquad \text{(p. 107)}$$

Pour un conducteur sphérique creux limité par les mêmes surfaces ayant les mêmes potentiels V_1 et V_2, la résistance totale au courant sera:

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

De cette analogie en découle une autre entre le flux de force et le courant. Pour une surface quelconque menée à l'intérieur du conducteur, le flux de force est:

$$\mathcal{F} = \int F ds \cos\alpha$$

intégrale prise suivant cette surface. D'autre part l'intensité

totale du courant qui traverse ~~le conducteur~~ la même surface est égale à :

$$I = \frac{1}{\rho}\int F ds = \frac{\mathcal{F}}{\rho}$$

Si l'on considère une surface qui entoure la surface S_1, l'intensité du courant qui la traverse est celle du courant qui passe de S_1 à S_2 ; elle est constante dans toute l'épaisseur du conducteur. D'autre part, le flux de force

$$\mathcal{F} = 4\pi k M, \qquad \text{(p.46)}$$

M étant la charge de l'armature interne du condensateur homologue. Il est également constant quelle que soit la surface considérée.

Si au contraire on prend une surface qui n'entoure pas la cavité du conducteur, le flux de force sera nul, et aussi l'intensité du courant qui la traverse : et en effet, la quantité d'électricité que le courant y apporte est égale à celle qu'il en emporte, de sorte que la somme algébrique des quantités d'électricité qui entrent et sortent est nulle.

Une autre analogie est celle qui a suggéré à Ohm la loi qu'il a découverte et vérifiée ensuite.

Rappelons les lois de la conductibilité calorifique. Soit un corps limité par 2 surfaces S_1 S_2, que l'on maintient respectivement aux températures t_1 et t_2. Si l'on prolonge l'expérience, un régime permanent

finit par s'établir, de telle sorte qu'en chaque point intérieur la température a une valeur constante et déterminée (intermédiaire entre t_1 et t_2.), ainsi que la quantité de chaleur qui traverse le corps en 1 seconde. Le régime permanent est l'analogue du courant électrique; la température, du potentiel; et les surfaces isothermes, des surfaces équipotentielles. Le flux de chaleur en un point est donné par la formule:

$$Q = -c\frac{dt}{dn}$$

c étant le coefficient de conductibilité, et $\frac{dt}{dn}$ la dérivée de la température par rapport à la normale à la surface isotherme. D'autre part le flux d'électricité dans un conducteur analogue, au point homologue, est:

$$I = \frac{F}{\rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{dV}{dn}.$$

Posons $\frac{1}{\rho} = \gamma$, coefficient de conductibilité électrique:

$$I = -\gamma\frac{dV}{dn}.$$

On voit que les deux formules sont de forme identique. C'est cette identité, supposée par Ohm, qui l'a conduit à rechercher si la conductibilité électrique obéit aux mêmes lois que la conductibilité calorifique.

Ainsi à tout problème de flux de chaleur correspond un problème de flux électrique, et par l'intermédiaire de celui-ci, un problème de condensateur. Par exemple, pour connaître la quantité de chaleur qui traverse

un conducteur creux sera donné par la formule du courant électrique, en y remplaçant $\frac{1}{\rho} = \gamma$ par c, et $(V_1 - V_2)$ par $(t_1 - t_2)$.

On ne sait pas grand chose des conductibilités spécifiques des conducteurs électriques; on n'a pas encore trouvé de loi générale qui les relie aux autres propriétés des divers corps, de manière que, connaissant ces propriétés pour un corps, on puisse prévoir & calculer sa conductibilité. On a remarqué que les corps conducteurs de l'électricité sont opaques et ont l'éclat métallique. Les corps transparents sont au contraire isolants. Ce fait, purement empirique jusqu'ici, dénote une corrélation cachée entre l'électricité et la lumière.

On a aussi remarqué que les corps bons conducteurs de la chaleur sont aussi bons conducteurs de l'électricité. MM. Wiedemann et Franz avaient cru pouvoir affirmer la proportionnalité des deux conductibilités; mais on a reconnu que cette proportionnalité n'est pas exacte. Il n'en est pas moins vrai que les corps se rangent dans le même ordre par rapport aux deux conductibilités, de sorte qu'elles croissent en même temps & dans le même sens.

On a constaté que tous les métaux solides purs ont une résistance qui croît quand leur température s'élève,

et qui est sensiblement proportionnelle à la température absolue. Cette loi n'est pas rigoureuse : la résistance de chaque métal éprouve pour 1 degré une variation un peu plus ou un peu moins grande que $\frac{1}{273}$.

Les métaux liquides conduisent moins bien l'électricité, ainsi que la chaleur. Mais le mercure solidifié a une résistance quatre fois moindre, de sorte qu'il se comporte comme les métaux solides.

Des impuretés, même faibles, altèrent notablement la conductibilité : ainsi les alliages conduisent moins bien l'électricité que les métaux purs.

Toutes ces lois empiriques ne sont pas encore expliquées. Pour cela, il faut attendre les progrès de la Chimie, qui découvrira peut-être la constitution des corps.

Des diélectriques (mot inventé par Faraday)

La propriété caractéristique des conducteurs est que, dans un conducteur dont la charge est en équilibre, le champ électrique est nul. Au contraire, dans un diélectrique, le champ n'est pas nul en général. Par exemple, un électroscope formé de 2 fils métalliques, plongé dans un liquide diélectrique (pétrole) ~~est~~ diverge quand il est électrisé (v. expérience contraire ds l'eau p. 74.)

On sait que dans la formule de Coulomb : $F = k\frac{mm'}{r^2}$,

le coefficient k dépend de la nature du diélectrique. En effet, la répulsion de 2 balles électrisées est plus de 2 fois moindre dans le pétrole que dans l'air. On pourrait mesurer k, pour les liquides, en plongeant la balance de Coulomb dans le liquide à étudier; mais ce procédé serait incommode. Il vaut mieux employer les formules dérivées de la loi de Coulomb, où figure toujours k; par exemple la formule de la capacité d'un condensateur (v. p. 99):

$$C = \frac{S}{4\pi k d}$$

Supposons que cette formule corresponde au cas où le diélectrique est l'air; si on le remplace par un autre diélectrique, on aura une autre capacité:

$$C' = \frac{S}{4\pi k' d}.$$

Donc

$$\frac{C'}{C} = \frac{k}{k'}$$

Si k est le coefficient relatif à l'air, on pose: $\frac{k}{k'} = K$. Le nombre K est la constante diélectrique du corps employé comme isolant.

De même qu'un corps conducteur est caractérisé par sa résistance spécifique, un corps isolant est caractérisé par sa constante diélectrique.

On fait l'expérience avec l'électroscope condensateur

qu'on charge, et dont on écarte les plateaux d'une quantité fixe : les feuilles divergent. On introduit entre les plateaux une lame de paraffine : les feuilles se rapprochent ; donc la capacité du condensateur a augmenté. ($C' > C$, donc $k' < k$; $K > 1$.)

12e leçon.

Il s'agit de vérifier par expérience l'existence de la constante diélectrique, par exemple, en cherchant si la loi de Coulomb régit les condensateurs à lame diélectrique comme les condensateurs à lame d'air étudiés jusqu'ici. On peut notamment vérifier si les capacités de deux condensateurs identiques, mais de lames différentes, sont dans un rapport constant.

1° Cavendish a eu le premier la notion des capacités électriques, et l'idée de les comparer de la manière suivante. Soient deux condensateurs identiques AB, $A'B'$; on porte les armatures A, A' au potentiel V, et les armatures B, B' au potentiel 0 ; on réunit les armatures en croix (AB', BA') et sur l'un des fils de communication on place un électroscope. Si les capacités sont égales, les charges s'équilibreront, et il ne passera pas d'électricité : l'électroscope ne divergera pas. Ayant ainsi un critérium d'égalité pour

les capacités, on pourra mesurer la capacité d'un condensateur donné en la comparant à des capacités connues et graduées. Cavendish a eu le premier l'idée d'employer un répertoire de capacités analogue à une boîte de poids. Mais cette méthode donnerait dans la pratique de médiocres résultats.

2° Méthode de Faraday. Soient deux conducteurs de capacités C et C', respectivement aux potentiels V et 0. Mettons-les en communication; ils prennent le potentiel commun $\underline{x}$. Leur charge étant la même, on a l'équation:

$$CV = (C+C')\,x \qquad x = \frac{CV}{C+C'}$$

Si $C = C'$, $\qquad x = \frac{V}{2}$.

Inversement, si le potentiel diminue de moitié, c'est que les 2 capacités sont égales. Dans tous les cas, le rapport du nouveau potentiel x à l'ancien V est égal au rapport de C à $C+C'$, et donne par suite le rapport de C à C'.

Pour constater que le potentiel du 1er conducteur a varié dans un certain rapport, il suffit de constater que la densité électrique en un même point de sa surface a varié dans le même rapport. Par exemple, on prendra 2 condensateurs sphériques, l'un A à lame d'air, l'autre B à lame diélectrique; on charge A, dont le

touche avec un plan d'épreuve ; on met ensuite A en contact ~~A et~~ avec B (à l'état neutre) et l'on touche A avec un autre plan d'épreuve. On porte les deux plans d'épreuve dans la balance de Coulomb, pour mesurer leurs charges. Le rapport de ces charges est celui des densités et par conséquent des potentiels V et x.

Faraday employait des condensateurs sphériques mais il ne remplissait que la moitié de la cavité avec le diélectrique à étudier (soit une calotte hémisphérique.) Il admettait que l'effet du diélectrique était la moitié de celui qu'il aurait produit s'il avait rempli toute la cavité ; hypothèse assez incorrecte. Il constata que tous les diélectriques augmentent la capacité d'un condensateur à lame d'air. Leurs constantes diélectriques sont donc supérieures à 1.

3° Pour vérifier la constance de K, évaluons l'attraction exercée par un plateau du condensateur sur l'autre. La tension électrique étant donnée par la formule :

$$\tau = 2\pi k \mu^2$$

La force qui s'exerce sur la surface S du plateau est :

$$F = 2\pi k \mu^2 S.$$

Soient V_1, V_2 les potentiels des 2 armatures, d leur distance ; la densité a pour expression :

$$\mu = \frac{1}{4\pi k} \times \frac{V_1 - V_2}{d}$$

et par suite la force :

$$F = \frac{S}{8\pi k}\left(\frac{V_1 - V_2}{d}\right)^2$$

Si l'on remplace l'air par un autre diélectrique, auquel correspond (par hypothèse) une autre constante k', on aura une autre force :

$$F' = \frac{S}{8\pi k'}\left(\frac{V_1 - V_2}{d}\right)^2$$

Donc :

$$\frac{F'}{F} = \frac{k}{k'} = K$$

On vérifie l'hypothèse en constatant que le rapport des forces est constant, quelles que soient les différences de potentiel et la distance.

Ainsi, si ~~l'on~~ dans un condensateur à plateaux on remplace l'air (ou le vide) par un diélectrique, le rapport de l'attraction nouvelle à l'ancienne est constant, et égal à la constante de ce diélectrique.

C'est là le principe de plusieurs méthodes destinées à mesurer les constantes diélectriques des liquides.

4° On peut recourir à la formule de l'énergie électrique :

$$W = \frac{1}{2} MV$$

où le coefficient k n'intervient pas directement, mais par la charge. Si dans un condensateur on remplace l'air par un diélectrique, on change sa capacité, donc sa charge (à potentiel égal), et par suite son énergie

$$W = \frac{1}{2} C V^2 \qquad W' = \frac{1}{2} C' V^2$$

Donc : $$\frac{W'}{W} = \frac{C'}{C} = K$$

Pour mesurer les énergies ou du moins leur rapport, on peut employer le thermomètre de Riess (p. 124.)

En résumé, toutes les formules obtenues pour les condensateurs peuvent ~~servir~~ à mesurer les constantes diélectriques. Elles prouvent en même temps l'existence de ces constantes, et par conséquent l'existence ~~de la~~ d'une constante K propre à chaque diélectrique, c.à.d. que les diélectriques obéissent à la loi de Coulomb.

Nous avons toujours considéré jusqu'ici le cas d'un seul milieu diélectrique. En effet, dans un condensateur fermé, le diélectrique intérieur seul importe, puisque le système est absolument indépendant de l'extérieur.

Dans le cas de plusieurs diélectriques différents, la loi de Coulomb n'est plus applicable car elle a été établie pour un milieu homogène. Elle ne peut nous apprendre ~~pas~~ ce qui arrive ~~se passe~~ quand on passe d'un diélectrique dans un autre.

Considérons un condensateur à plateaux, dont la distance est $\underline{d}$; interposons une lame diélectrique d'épaisseur $\underline{e}$, parallèlement aux plateaux. L'expérience montre que :

1° L'effet est indépendant de la position du diélectrique (lors même qu'il est en contact avec l'une ou l'autre des armatures);
2° L'effet est le même que si l'on rapprochait les plateaux de la distance $\frac{e}{K}$.

Nous avons trouvé que, dans le cas où la lame d'air est entièrement remplacée par une lame diélectrique, la capacité est multipliée par K, ce qui revient à diviser par K la distance des 2 armatures (p. 144). Ainsi une lame diélectrique interposée entre les plateaux du condensateur produit le même effet, qu'elle remplisse ou non l'intervalle.

Dans le condensateur primitif (à lame homogène) la distribution du potentiel entre les 2 plateaux étant linéaire, les surfaces de niveau étaient équidistantes. Dans le nouveau condensateur, les surfaces de niveau sont encore équidistantes dans l'air, d'une part, et dans la lame diélectrique, d'autre part; mais, comme la lame correspond à une couche d'air d'épaisseur $\frac{e}{K}$, la distance des surfaces équipotentielles à son intérieur est égale à leur distance dans l'air multipliée par K.

Or on sait que
$$F = -\frac{dV}{dn}$$
dn étant la distance de 2 surfaces équipotentielles

dont la différence de potentiel est dV, augmente dans le rapport K ; donc la force exercée à l'intérieur de la lame sur l'unité d'électricité est réduite dans le même rapport K. Elle est d'ailleurs constante dans toute l'épaisseur de la lame.

Ainsi la force varie brusquement d'un côté à l'autre de la surface de séparation de 2 diélectriques. On va la faire rentrer dans le cas d'application de la loi de Coulomb au moyen d'un artifice.

Lorsqu'on traverse la surface d'un conducteur, on sait que la composante normale de la force varie brusquement de $4\pi k\mu$.

Quand on traverse la surface d'un diélectrique, la force, qui à l'extérieur (dans l'air ou dans le vide) était F, devient $\frac{F}{K}$.

L'effet produit est donc le même que si l'on remplaçait le diélectrique par un conducteur portant une distribution d'électricité dont la densité μ' serait déterminée par l'équation :

$$F - \frac{F}{K} = 4\pi k\mu' \qquad \mu' = \frac{F}{4\pi k} \cdot \frac{K-1}{K}$$

le coefficient k correspondant au milieu extérieur.

Seulement, ce n'est là qu'une fiction, car il n'y a pas d'électricité à la surface d'un diélectrique, comme on

peut s'en assurer avec un plan d'épreuve. Mais cette fiction permet de ramener les problèmes de diélectriques aux problèmes de conducteurs, auxquels s'applique la loi de Coulomb. Ce n'est qu'une traduction analytique des lois expérimentales, destinée à les soumettre au calcul.

Grâce à cet artifice, on ramène le cas de plusieurs diélectriques au cas d'un seul.

Par exemple les théorèmes relatifs au flux de force subsistent encore dans cette hypothèse. Considérons en effet un élément ds de la surface d'un diélectrique; circonscrivons-lui un cylindre normal terminé par deux surfaces équipotentielles infiniment voisines. Le flux de force qui traverse la face externe est $F\,ds$, celui qui traverse la face interne est $-\frac{F}{K}\,ds$; celui qui traverse la surface latérale du cylindre est nul. Le flux de force total qui pénètre dans le cylindre n'est pas nul:

$$\left(F - \frac{F}{K}\right)ds = \frac{K-1}{K}\,F\,ds.$$

Mais, en vertu de la fiction, on doit supposer que la surface du diélectrique porte une distribution μ', donc la charge fictive de l'élément ds est $\mu'\,ds$.

Or la densité μ' est: $\frac{F}{4\pi k}\cdot\frac{K-1}{K}$

On a donc identiquement:

$$\frac{K-1}{K}\,F\,ds = 4\pi k\,\mu'\,ds$$

formule du théorème du flux de force (p. 46.)

Les propositions précédentes fournissent une méthode très commode pour déterminer la constante des diélectriques solides : car on n'est pas obligé de remplir tout l'intervalle des armatures avec la lame diélectrique (dont le frottement électriserait les plateaux.)

Cherchons maintenant comment varie le champ électrique à l'intérieur d'un diélectrique. En vertu de l'hypothèse précédente, et si elle est bien conforme aux faits, la composante normale de la force doit varier de $4\pi K\mu'$ en traversant la surface du diélectrique.

Soit F la force dans le champ extérieur, X sa composante tangentielle, Y sa composante normale. On doit supposer que celle-ci varie dans le rapport $\frac{1}{K}$ comme dans le cas du condensateur ; on doit donc avoir :

$$Y - \frac{Y}{K} = 4\pi K\mu' \qquad Y' = \frac{Y}{K}.$$

La composante X restant la même, les lignes de force se réfractent en traversant la surface du diélectrique. Calculons leur loi de réfraction ; soit i leur angle d'incidence, r l'angle de réfraction :

$$tg\, i = \frac{X}{Y} \qquad tg\, r = \frac{X}{Y'}$$

D'où l'on tire :

$$\frac{tg\, r}{tg\, i} = \frac{Y}{Y'} = K.$$

Il est difficile de vérifier directement cette formule. Mais on peut pousser plus loin les déductions fondées sur l'hypothèse et en tirer des conséquences vérifiables. Par exemple, Boltzmann a calculé l'action d'une grosse sphère conductrice électrisée sur une petite sphère diélectrique (c'est le problème du pendule électrique.) Il a trouvé que le rapport de l'attraction exercée est à celle que subirait une petite sphère conductrice de même volume et de même position dans le rapport

$$\frac{K-1}{K+2}$$

Ainsi l'attraction exercée sur un diélectrique est moindre que celle qui s'exerce sur un conducteur dans les mêmes conditions.

Boltzmann, admettant la vérité de cette formule a mesuré par ce procédé diverses constantes diélectriques et a trouvé des résultats conformes à ceux qu'on avait obtenus par d'autres méthodes. C'est ~~donc~~ là une vérification très délicate de l'hypothèse d'où l'on est parti.

Boltzmann a ainsi étudié certains corps qu'on n'obtient que sous forme de petits cristaux, en taillant de petites sphères dans un cristal de soufre par ex. Il a trouvé qu'un cristal a 3 constantes diélectriques différentes suivant ses 3 axes principaux. On sait que les cristaux ont aussi 3

constantes élastiques et 3 indices de réfraction. C'est là une analogie très intéressante.

Jusqu'ici nous avons nettement distingué deux classes de corps : les conducteurs et les diélectriques. Or, en dehors de l'air parfaitement sec, il n'y a pas de corps absolument isolant. Dans un bon diélectrique comme le pétrole un condensateur se décharge lentement. Si l'on essaie d'électrolyser un pétrole conducteur, sa conductibilité diminue ce qui fait supposer qu'elle tient à des impuretés.

On peut mesurer à la fois la constante diélectrique et la conductibilité d'un diélectrique imparfait, qui forme la lame isolante d'un condensateur. Supposons le diélectrique parfait, et remplaçons-le par un fil de grande résistance R qui relie les 2 armatures. Plaçons le condensateur imparfait en série avec un condensateur parfait (à lame d'air) dans le circuit d'une pile ; on ferme le circuit pendant un temps très court t (au moyen d'un commutateur automatique.) Soient V et V_1 les potentiels des armatures du condensateur à air, V_1 et V_2 ceux des armatures du mauvais condensateur. La charge du 1er sera : $M = C(V - V_1)$

La charge du 2e sera égale à celle du 1er, mais elle

comprend, outre la charge fixe, la quantité d'électricité qui s'est écoulée par le fil pendant le temps t :

$$M = C'(V_1 - V_2) + \frac{V_1 - V_2}{R} t.$$

En supposant que la résistance du circuit extérieur est négligeable (fils gros et courts), la force électromotrice est :

$$E = V - V_1 + V_1 - V_2 = V - V_2.$$

On décharge le 1er condensateur, et l'on mesure sa charge M ; connaissant sa capacité C on calcule $V - V_1$. D'autre part, connaissant E, on en tire $V_1 - V_2$; enfin l'on connaît t. Il reste 2 inconnues, C' et R. On les déterminera en faisant 2 expériences de durée différente. Au moyen de C' on calcule K, constante diélectrique de la lame isolante ; au moyen de R, on calcule sa résistance spécifique ρ.

La plupart des expérimentateurs ont disposé les appareils de telle sorte que t soit négligeable et par suite aussi la quantité d'électricité qui fuit par le mauvais diélectrique. Ils obtenaient ainsi C' et par suite K seulement. Mais cette méthode est moins rigoureuse et ne donne pas la conductibilité du diélectrique.

Maxwell a été conduit par des considérations théoriques à énoncer une relation curieuse entre la constante diélectrique K d'un corps et son indice de réfraction

n : $$K = n^2.$$

Mais cette relation n'est pas vérifiée par l'expérience. Elle paraît ~~est~~ vraie pour les gaz, dont les constantes diélectriques sont ~~toutes~~ très voisines de 1. Mais comme leurs indices de réfraction sont aussi fort voisins de 1, les mesures sont peu exactes et la vérification est peu probante.

Pour les liquides communs, l'indice de réfraction varie entre 1,33 et 1,5. Leurs constantes diélectriques ne varient guère plus, et sont bien de l'ordre de n^2. Seulement, l'ordre des K croissants n'est pas exactement le même que celui des n croissants, de sorte que la loi n'est pas rigoureuse. Enfin, pour les mauvais diélectriques, elle n'est plus du tout vraie: par exemple l'eau a pour indice de réfraction $\frac{4}{3} = 1,33$; or ~~et~~ sa constante diélectrique est environ 80 (de 78 à 82.)

En revanche, la loi est plus exacte quand on prend pour n l'indice de réfraction des ondulations électriques (et non plus lumineuses) Il semble donc que la relation : $K = n^2$ soit plutôt applicable aux oscillations hertziennes, dont on parlera plus tard.

La constante diélectrique d'un corps varie très peu (comme son indice de réfraction) Ainsi celle du mica

(qui sert d'isolant dans les condensateurs étalons) est 8. Or il n'a pas de conductibilité sensible à la température ordinaire, tandis qu'à 400° sa conductibilité devient notable (800 à 1000 fois plus grande.) Sa constante diélectrique reste au contraire la même.

De même, la conductibilité de la glace à 0° est déjà beaucoup plus faible que celle de l'eau, et elle diminue énormément avec la température; mais la glace à -23° a encore la même constante diélectrique que l'eau.

Les sels en dissolution (électrolytes) sont conducteurs. Solides, ils sont bien moins conducteurs, et deviennent diélectriques en se refroidissant.

Dans ce cas, on ne peut plus alléguer les impuretés: il faut donc bien admettre que le sel lui-même est à la fois conducteur et diélectrique, à l'état pur.

En résumé, pour une durée suffisamment courte, tous les corps sont diélectriques; pour une durée suffisamment longue, ils sont tous conducteurs. La différence des conducteurs et des diélectriques n'est donc qu'une affaire de temps.

13e leçon
Machines électriques.

Les machines électriques sont des appareils destinés à produire entre des conducteurs une certaine différence de potentiel.

Si l'on dispose d'une différence de potentiel, si faible qu'elle soit, on peut par un travail mécanique obtenir une différence de potentiel aussi grande qu'on veut.
Soit $V_1 - V_2$ la différence de potentiel dont on dispose. On l'emploie à charger un condensateur à plateaux dont la distance (très petite) est ε. La charge correspondante est :

$$M = \frac{S}{4\pi k\varepsilon}(V_1 - V_2)$$

Puis on sépare les plateaux et on les éloigne à l'infini (c. à d. assez pour que leur influence mutuelle soit négligeable)
Soit C la capacité d'un plateau seul ; son potentiel x est déterminé par la relation :

$$Cx = \frac{S}{4\pi k\varepsilon}(V_1 - V_2) \qquad x = \frac{S}{4\pi k\varepsilon C}(V_1 - V_2)$$

De même, l'autre plateau prend le potentiel $-x$; leur différence de potentiel est donc $2x$:

$$\frac{2x}{V_1 - V_2} = \frac{S}{2\pi k\varepsilon C}$$

On voit que son rapport à l'ancienne différence de potentiel est d'autant plus grand que ε est plus petit.
Pour un plateau circulaire, on a :

$$C = r : \frac{\pi}{2} = \frac{2r}{\pi} \qquad S = \pi r^2 \qquad \frac{S}{C} = \frac{\pi^2 r}{2}$$

$$2x = \frac{\pi r}{4k\varepsilon}(V_1 - V_2)$$

Le travail mécanique est celui qu'on dépense en éloignant les 2 plateaux malgré leur mutuelle attraction. Mais le travail mécanique ne peut produire d'électricité par lui-même, si l'on n'a pas une différence de potentiel.

Reste à trouver des différences de potentiel données c.à.d. des sources naturelles d'électricité.

Expérience de Galvani sur la grenouille.

Où est la source d'électricité dans le circuit ABC formé par les 2 fils de cuivre et de zinc et la grenouille? Selon Galvani, c'était dans les tissus de la grenouille; et cette opinion est plausible, car il y a des animaux qui produisent l'électricité (torpille, gymnote.) Selon Volta, c'était dans le contact A des 2 métaux: la grenouille jouait le rôle d'un simple conducteur, ou d'un électroscope. Enfin, selon Fabroni, c'était au contact des métaux avec les tissus baignés de liquides organiques (en B et C); et en effet, il est probable qu'il s'y produit une action chimique capable d'engendrer un courant (comme le prouve l'exemple des piles chimiques.)

Mais Volta n'avait pas tort non plus, car il parvint

à produire de l'électricité sans réaction chimique ni tissu organique, en touchant son électroscope condensateur avec le cuivre d'une lame bimétallique dont on tient le zinc à la main. Pourtant, les partisans de Fabroni pouvaient alléguer l'action chimique de la main de l'opérateur sur le zinc.

Péclet et Pfaff ont encore simplifié l'expérience : l'arc bimétallique se termine par des plateaux des mêmes métaux, placés bien en face de l'autre et très rapprochés ; ils se chargent ; si l'on supprime le contact des plateaux avec l'arc et qu'on les éloigne l'un de l'autre, on les trouve chargés d'électricité contraire. Ici aucune action organique ou chimique n'intervient plus. Mais il y a encore un intermédiaire, l'air. Or M. Pellat a montré que la charge des plateaux et par suite leur différence de potentiel n'est pas tout à fait la même quand on opère dans le vide ou dans un autre gaz que l'air. Il faut donc tenir compte de l'influence du diélectrique.

On a essayé de composer le circuit avec 2 métaux seulement, en soudant aux deux bouts un arc de cuivre et un arc de zinc. Mais on n'a ainsi obtenu aucun courant. Volta expliquait simplement ce fait en disant que les

forces électromotrices produites par les deux soudures, étant égales et contraires, se neutralisent mutuellement. De même, dans une chaîne formée de plusieurs métaux, chaque métal étant à un potentiel constant, la somme algébrique des différences de potentiel est nécessairement nulle et par suite la force électromotrice du circuit. C'est ce que Volta appelait la loi des tensions (Il appelait tension ce que nous nommons potentiel.)

On lui a objecté que les forces électromotrices qu'il supposait à chaque contact de métaux différents ne pouvaient exister, attendu qu'un contact ne ~~produit~~ ~~peut produire~~ fournit pas de travail; mais c'est abuser du principe de l'équivalence, qui n'a de valeur qu'en Thermodynamique.

On sait que si, dans une chaîne de plusieurs métaux soudés, on chauffe une des soudures on produit un courant, ce qui n'arrive pas quand on chauffe un seul métal. Ce fait suffit à prouver que la soudure est le siège d'une force électromotrice. Quand toutes les soudures sont à la même température, les forces électromotrices se neutralisent, comme on vient de le dire; mais si l'on chauffe une des soudures on augmente sa force électromotrice et l'on détruit l'équilibre. Ce fait met donc en évidence la différence de potentiel de deux corps

hétérogènes en contact.

Il y a aussi des forces électromotrices au contact d'un corps conducteur et d'un diélectrique : car l'expérience de M. Pellat prouve l'influence du diélectrique gazeux sur le courant produit par les 2 métaux soudés.

Le potentiel étant constant dans chaque conducteur homogène, il faut qu'il varie dans la surface de contact ; aussi Helmholtz la considère-t-il comme un condensateur. Cette surface est en réalité une couche d'épaisseur moléculaire où les 2 métaux sont modifiés et confondus. Le zinc par ex. a une charge positive et un potentiel V_1 ; le cuivre a une charge négative et un potentiel $V_2 < V_1$. De même que les charges s'accumulent dans les deux plateaux, de même elles s'accumulent dans la couche intermédiaire des 2 métaux. Pour expliquer que les deux charges contraires et si voisines ne se réunissent pas, il faut admettre que chaque métal attire l'électricité dont il est chargé plus que les 2 électricités ne s'attirent entre elles. Cela est conforme à la théorie unitaire où l'on tient compte de l'attraction de la matière sur l'électricité.

Voilà tout ce qu'on sait sur la force électromotrice due au contact. Elle est néanmoins le principe des <u>machines électriques à frottement</u>, dont la machine de Ramsden est le type.

Machine de Ramsden. Pour simplifier, imaginons qu'au lieu d'embrasser le plateau de verre avec des peignes le conducteur l'enveloppe et soit en contact avec lui. Le contact du verre et du coussin développe une force électromotrice ; les ~~contact du plateau avec le conducteur~~ surfaces en contact forment le condensateur : si on les éloigne l'une de l'autre, ils seront portés à un haut potentiel. Mais pour cela, il faut que l'un des corps soit diélectrique ; car s'ils étaient tous deux conducteurs, comme on ne peut les séparer instantanément, les électricités contraires s'écoulent et se réunissent par le dernier point de contact. Quand on tourne le plateau, le verre il reste chargé d'électricité à un haut potentiel V, et passe à l'intérieur du conducteur, auquel il cède sa charge, jusqu'à ce que le conducteur arrive lui-même au potentiel $V-\varepsilon$ (ε étant la différence de potentiel maxima entre le verre et le conducteur.)

Le travail mécanique est dépensé à séparer le verre du coussin qui l'attire ; mais il est beaucoup plus faible que celui qui provient du frottement.

Les peignes qui terminent le conducteur sont destinés à permettre l'échange des électricités et la neutralisation du plateau, tout en supprimant le contact et par suite le frottement.

La théorie des machines électriques à influence est plus simple et plus claire. Nous prendrons pour type le replenisher de lord Kelvin, qui se compose essentiellement de 3 organes tous conducteurs : 1° les porteurs ; 2° les inducteurs ; 3° les récepteurs.

Les porteurs sont des sphères A, B portées par un levier qui tourne dans un plan vertical. Quand le levier est horizontal, elles viennent toucher des balais qui les mettent en communication avec le sol. En face de cette position horizontale se trouvent les inducteurs I, I', qui sont des sphères électrisées au préalable en sens contraire. Un peu plus loin (dans le sens de la rotation) se trouvent les récepteurs R, R', qui communiquent respectivement avec les inducteurs opposés, et qui portent des ressorts que les sphères A, B viennent toucher en tournant. Cela posé, et I étant électrisé positivement, A s'électrise négativement sous l'influence de I en passant auprès (l'électricité positive s'écoule dans le sol), et il se décharge aussitôt sur R. Il augmente ainsi la charge négative de R et par suite de I' ; en même temps B, se déchargeant sur R', augmente la charge positive de I.

A et B étant déchargés, le même phénomène se produit quand ils viennent passer devant I' et I, et avec plus d'intensité. On peut calculer l'augmentation de potentiel à chaque demi-tour. Soit C la capacité de chacun des systèmes (symétriques) R + I' et R' + I. Soient V_1, V_2 les potentiels primitifs des inducteurs I, I'. Leurs charges primitives seront respectivement :

$$M_1 = CV_1 \qquad M_2 = CV_2$$

Les porteurs, étant au potentiel 0, reçoivent des charges proportionnelles aux potentiels des inducteurs :

$$Q_1 = -aV_1 \qquad Q_2 = -aV_2$$

puis ils les communiquent aux récepteurs, dont les charges deviennent en conséquence :

$$M_1' = M_1 + Q_2 = CV_1 - aV_2 = CV_1'$$

$$M_2' = M_2 + Q_1 = CV_2 - aV_1 = CV_2'$$

V_1', V_2' étant les nouveaux potentiels de I, I' ; d'où :

$$C(V_1' - V_2') = C(V_1 - V_2) + a(V_1 - V_2)$$

ou $$V_1' - V_2' = (V_1 - V_2)\left(1 + \frac{a}{C}\right)$$

Ainsi la différence de potentiel après un demi-tour est égale à la précédente multipliée par $1 + \frac{a}{C} > 1$. Elle croît donc en progression géométrique, et d'autant plus rapidement que C est plus petit et <u>a</u> plus grand.

Une telle machine est réversible : si on la fait tourner

en sens inverse, on diminue la différence de potentiel en déchargeant progressivement les récepteurs, de sorte qu'on peut obtenir telle différence de potentiel qu'on veut. En même temps, on recouvre du travail au lieu d'en dépenser, parce que ~~à cause de~~ l'attraction des inducteurs sur les porteurs favorise le mouvement au lieu de le contrarier.

Il en résulte qu'une machine électrique de ce genre peut, grâce à la réversibilité, devenir un moteur électrique. En effet, si l'on accouple les récepteurs de 2 machines semblables, et qu'on fasse tourner l'une dans le sens direct, elle consommera du travail et produira de l'électricité; l'autre se mettra à tourner en sens inverse, en perdant de l'électricité et en produisant du travail.

Lord Kelvin a imaginé une machine de ce genre qui fonctionne automatiquement, au moyen d'un appareil à écoulement : les inducteurs et les récepteurs sont des tubes cylindriques dans lesquels tombent les gouttes d'eau qui jouent le rôle de porteurs. Les gouttes, en communication avec le sol par le robinet, s'électrisent en traversant le tube inducteur, et cèdent leur charge au tube récepteur terminé par un entonnoir. Le travail mécanique est ici effectué par la pesanteur.

Nous nous dispenserons de faire la théorie de la machine de Holtz, qui est fondée sur le même principe. Les inducteurs sont les deux cartons, les récepteurs sont les conducteurs terminés par des peignes. Les porteurs sont les deux moitiés du disque mobile. Les inducteurs communiquent avec les récepteurs, à travers ce disque, au moyen des peignes qui facilitent l'échange des électricités.

Le travail est mieux utilisé dans les machines à influence que dans les machines à frottement, car les frottements y sont bien moindres (plus de coussins). M. Rossetti a mesuré le travail consommé par une machine de Holtz, amorcée et non amorcée, en la faisant mouvoir par des poids. La différence est le travail dépensé à produire l'électricité : il est encore faible relativement au travail mécanique. On trouve qu'il est proportionnel au débit de la machine. Ce débit peut se mesurer par le nombre d'étincelles que ~~donne~~ fournit en un temps donné la bouteille de Lane reliée aux récepteurs de la machine.

Si l'on compare les machines à frottement et les machines à influence (par ex. celle de Ramsden et celle de Holtz), on trouve qu'elles donnent des potentiels à peu près égaux mais le débit des machines à influence est beaucoup plus grand

Instruments de mesure électrostatique.

Les électromètres sont des instruments destinés à mesurer les différences de potentiel électrostatique. On les divise en électromètres absolus et él. relatifs, suivant qu'ils servent à déterminer la valeur absolue ~~de~~ ou relative des différences de potentiel.

__L'électromètre sphérique de M Lippmann__ est un électromètre absolu. On sait (p. 111) que la répulsion des 2 hémisphères chargés au même potentiel V est :

$$F = \frac{1}{8k} V^2.$$

Pour ~~mesurer~~ avoir la valeur absolue de V, il suffit de connaître k et de mesurer la répulsion F. Pour cela l'hémisphère mobile est suspendu par 3 fils à l'hémisphère fixe, et forme un pendule électrique, dont la déviation mesure la répulsion :

$$F = mg \operatorname{tg} \alpha$$

Il suffit de connaître le poids mg de l'hémisphère mobile, et l'angle α de déviation. Pour le mesurer, on observe un miroir qui est porté par 2 des fils de suspension, et sur lequel la lumière tombe par un petit trou percé dans l'hémisphère. — Cet appareil est surtout propre à la mesure des forts potentiels.

Pour le rendre plus sensible, on l'entoure d'une sphère

conductrice au potentiel 0, qui forme avec lui un condensateur sphérique. Soit R_1 le rayon de cette sphère, R_2 celui de l'électromètre sphérique; on sait que la capacité de celui-ci augmente dans le rapport $\frac{R_1}{R_1-R_2}$ ~~et~~ que la ~~charge~~ force ~~augmente comme~~ est proportionnelle le carré de la ~~capacité~~ charge (à potentiel égal); donc la force est multipliée par le carré de ce même rapport (p. 107, 111.) Si par exemple $R_2 = \frac{9}{10} R_1$, $\frac{R_1}{R_1-R_2} = 10$; la répulsion est donc centuplée.

L'électromètre de M. Lippmann est un condensateur sphérique ~~combiné avec un~~ formant un pendule électrique; l'électromètre de MM Bichat et Blondlot est un condensateur cylindrique combiné avec une balance.

Un cylindre creux fixe reçoit à son intérieur un cylindre plein mobile verticalement, et porté par un fléau de balance à bras inégaux et équilibré par une tare. Si l'on porte les 2 cylindres respectivement aux potentiels V_1 et V_2, l'attraction sera proportionnelle au carré de $(V_1 - V_2)$. On équilibre cette force en mettant des poids dans le plateau suspendu au cylindre mobile. On calcule la différence de potentiel au moyen de la force ainsi mesurée directement.

On sait que dans un condensateur dont les armatures sont à potentiel constant (en relation avec des sources), la force est exprimée par la formule (p. 119):

$$F = + \frac{dW^t}{dx}$$

Soit C la capacité du condensateur par unité de longueur, et dx la longueur dont le cylindre mobile s'enfonce dans le cylindre fixe. La capacité s'accroît de Cdx, et la charge de $C(V_1 - V_2)\,dx$; donc l'énergie s'accroît de:

$$dW^t = \frac{1}{2} Cdx\,(V_1 - V_2)^2$$

$$F = \frac{dW^t}{dx} = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{(V_1 - V_2)^2}{4k \log \frac{r_2}{r_1}} \quad (\text{v. p. } 108)$$

r_1 et r_2 étant les rayons des 2 armatures cylindriques.

Cet appareil est le plus simple et le plus commode des électromètres absolus. On peut le rendre plus sensible en employant des cylindres fixes de plus en plus étroits.

14e leçon

L'électromètre de lord Kelvin est essentiellement un condensateur à plateau combiné avec un peson. C'est le plus ancien et le plus parfait des électromètres absolus. Le plateau inférieur B est fixe, le plateau supérieur A, mobile, est porté par un ressort dont la flexion mesure leur attraction. Pour éviter la distribution irrégulière sur les bords, le plateau supérieur est divisé par une rainure

circulaire très mince qui détache l'anneau de garde A. La partie intérieure S est seule mobile. Pour que les résultats soient exacts, il faut que le disque S soit dans le plan de l'anneau de garde. Aussi est-il relié à un levier ~~qui~~ dont l'autre extrémité se meut sur une règle divisée portant un point de repère correspondant à la position normale du disque. On observe l'extrémité du levier avec une loupe. L'ensemble du levier et de la loupe forme ce que lord Kelvin appelle une jauge.

Le plateau fixe B est porté par une vis micrométrique qui permet de l'élever plus ou moins, et de mesurer sa distance au plan de l'anneau de garde A. Pour cela, il suffit de le monter jusqu'à ce qu'il touche l'anneau, puis de l'abaisser en comptant les tours et fractions de tour de la tête de la vis.

Cela fait, on met en communication le plateau S et l'anneau de garde avec une source de potentiel V_1, le plateau B avec une autre source de potentiel V_2. On trouvera toujours (par tâtonnement) une distance e des 2 plateaux telle que le disque S soit en équilibre dans le plan de l'anneau de garde. La différence de potentiel à mesurer sera donnée par la formule:

$$F = \frac{S}{8\pi k}\left(\frac{V_1 - V_2}{e}\right)^2 \qquad \text{(p. 110.)}$$

Pour évaluer F, le ressort qui porte le plateau mobile S est suspendu à une vis micrométrique, et on l'a préalablement taré pour ses diverses positions en chargeant le plateau S (non électrisé) de poids gradués jusqu'à ce qu'il se trouve dans le plan de l'anneau de garde.

Cet appareil permet aussi de mesurer un potentiel en valeur absolue, en le comparant au potentiel 0 (càd. en mettant B en communication avec le sol) On peut aussi le comparer à un potentiel connu. Pour cela la boîte qui contient l'électromètre porte un petit replenisher qui permet de porter le plateau B à un potentiel toujours le même (comme on le constate à l'aide d'un petit disque à ressort et d'une jauge) V_0 étant ~~connu~~ connu d'avance, on mesure $V_1 - V_0$ et l'on en tire la valeur de V_1.

Pour mesurer une différence de potentiel, on peut mesurer d'abord $V_1 - V_0$, puis $V_2 - V_0$, la différence est $V_1 - V_2$. Cette quantité dépend seulement de la différence $(e_1 - e_2)$. Ainsi l'on peut se dispenser d'amener le plateau B au contact de l'anneau A, comme dans le cas d'une expérience unique; il suffit de mesurer les 2 écarts successifs, et même simplement leur différence

Le plus souvent, on n'a qu'à évaluer la grandeur relative des différences de potentiel. Leur mesure n'exige alors que des appareils sensibles. On peut l'effectuer par deux méthodes différentes :

1° On fait la théorie de l'appareil, et l'on obtient une formule qui contient certaines constantes instrumentales. On observe les déviations qu'il subit, à partir de sa position d'équilibre, pour diverses différences de potentiel. Il suffit de comparer ces déviations pour connaître les valeurs relatives des potentiels, sans avoir à évaluer les constantes instrumentales.

2° On s'astreint à observer l'appareil dans une position fixe, et pour cela on rétablit l'équilibre au moyen d'une différence de potentiel connue et dont on dispose. On n'a plus alors besoin de connaître la loi des déviations, puisqu'on ramène toujours l'appareil à la même position ; il suffit qu'il soit sensible, c.à.d. que les déviations soient notables pour une faible inégalité de potentiel.

Le plus simple des électromètres relatifs est l'<u>électromètre à plateaux de Hankel</u> : entre 2 plateaux verticaux A, B est suspendue une feuille d'or dont on note la position d'équilibre. Si on l'électrise positivement elle se déplacera dans le sens de la force électrique (du potentiel élevé au

le plus

moins dévié.) On porte les 2 plateaux (respectivement) aux potentiels V_1 et V_2 qu'il s'agit de comparer. S'ils sont égaux, la feuille d'or prendra sa position d'équilibre (verticale). S'ils sont inégaux, on la ramènera à cette position zéro en neutralisant la différence de potentiel $(V_1 - V_2)$ par une différence de potentiel variable et connue: la valeur de celle-ci sera égale et contraire à celle de $(V_1 - V_2)$

Electromètre à quadrants de lord Kelvin.

Cet appareil se compose essentiellement d'une boîte circulaire plate divisée en 4 quadrants, à l'intérieur desquels peut tourner une aiguille d'aluminium formée de 2 quadrants opposés, et suspendue à un fil de torsion: ce fil porte en bas un miroir destiné à manifester les déviations et ~~[illegible]~~ se termine par une aiguille aimantée destinée à fixer la direction de l'équilibre.

On porte les secteurs 1 et 3 au potentiel V_1, les secteurs 2 et 4 au potentiel V_2, et l'aiguille mobile au potentiel V_0. L'ensemble forme 2 condensateurs doubles. En effet, chaque quadrant forme un condensateur avec la partie de l'aiguille qu'il contient; de même le quadrant opposé, qui complète ce condensateur. Les 2 autres quadrants forment avec le reste de l'aiguille un autre condensateur. Evaluons la force à laquelle l'aiguille est soumise. On sait que, dans un

condensateur à potentiels constants, la force s'exprime par la formule:
$$F = + \frac{dW}{dx}$$ (p. 119)
Evaluons d'abord l'énergie totale du système. Soit C_1 la capacité du condensateur formé par les secteurs 1 et 3, C_2 celle du condensateur formé par les secteurs 2 et 4:
$$W = \frac{1}{2}\left[C_1(V_1-V_0)^2 + C_2(V_2-V_0)^2\right]$$
Pour un déplacement angulaire $d\alpha$, la variation de l'énergie sera (les potentiels restant constants):
$$dW = \frac{1}{2}\left[(V_1-V_0)^2 dC_1 + (V_2-V_0)^2 dC_2\right]$$
Calculons la variation de la capacité C_1 (celle de la capacité C_2 lui sera égale et contraire) Soit r le rayon de l'aiguille: l'aire du secteur dont ~~s'est accru~~ a tourné ~~le 1er condensateur~~ l'aiguille est:
$$\frac{1}{2} r^2 d\alpha.$$
Le 1er condensateur s'est accru du double de ce secteur et le 2e condensateur a diminué d'autant, soit de:
$$r^2 d\alpha.$$
La capacité d'un condensateur simple étant donnée par la formule:
$$C = \frac{S}{4\pi k e}$$
celle du condensateur double formé par les 2 faces de l'aiguille avec les 2 plaques ~~de~~ opposées (équidistantes) des quadrants sera:
$$C_1 = \frac{S}{2\pi k e}$$
Les variations des capacités sont par conséquent:
$$dC_1 = \frac{r^2 d\alpha}{2\pi k e} = - dC_2$$

Il vient finalement :

$$dW = \frac{r^2 d\alpha}{4\pi ke}\left[(V_1 - V_0)^2 - (V_2 - V_0)^2\right]$$

L'expression entre crochets revient simplement à :

$$(V_1 - V_0 + V_2 - V_0)(V_1 - V_0 - V_2 + V_0) = (V_1 + V_2 - 2V_0)(V_1 - V_2)$$

Donc : $F = \frac{dW}{r d\alpha} = \frac{r}{4\pi ke}(V_1 + V_2 - 2V_0)(V_1 - V_2)$

D'autre part, on sait qu'avec un fil de torsion ~~la~~ l'angle de déviation est proportionnel à la force ; d'ailleurs, la force ne dépend pas de α, elle reste donc constante pendant la déviation. ~~On doit donc avoir~~ La formule de l'instrument sera :

$$\alpha = P(V_1 + V_2 - 2V_0)(V_1 - V_2)$$

P étant une constante instrumentale qu'il est inutile de connaître pour des mesures relatives.

Cette formule présente 2 cas particuliers remarquables :

1er cas. Si V_0 est très grand par rapport à V_1 et à V_2, le facteur $(V_1 + V_2 - 2V_0)$ pourra être regardé comme invariable ; la déviation sera alors proportionnelle à

$$V_1 - V_2 .$$

C'est dans ce cas que se plaçait sir William Thomson.

2e cas. Si $V_1 = -V_2$, on aura les relations :

$$V_1 + V_2 = 0 \qquad V_1 - V_2 = 2V_1$$

$$\alpha = P(-2V_0)(2V_1) = -4P.V_0 V_1$$

Si V_1 est fixe, l'angle de déviation sera proportionnel au

potentiel (inconnu) V_0 de l'aiguille. C'est le cas qu'a choisi M. Mascart dans son perfectionnement de l'électromètre à quadrants.

Pour porter les 2 paires de quadrants à des potentiels égaux et contraires, on emploie une pile de 200 éléments Volta, composés de cuivre, zinc et eau pure (on peut les faire aussi petits qu'on veut, on a la même force électromotrice, et il n'y a pas d'inconvénient à augmenter leur résistance) On met le milieu de la série en communication avec le sol, et les 2 extrémités avec les 2 couples de quadrants. Enfin on fait communiquer l'aiguille avec la source dont on veut ~~connaître~~ mesurer le potentiel.

L'inconvénient de l'appareil ainsi disposé est que le potentiel d'une pile n'est pas fixe; on ne peut le considérer comme constant d'un jour à l'autre, de sorte que les mesures relatives prises à différents jours ne sont pas comparables.

Phénomènes magnétiques.

C'est vers 1824 que le savant danois Œrstedt découvrit l'action d'un courant électrique sur une aiguille aimantée. Il se borna à répéter cette expérience en la variant, et n'en tira aucune conséquence.

Ampère supposa que les courants étaient analogues aux aimants, et imagina les expériences qui lui firent découvrir les lois électrodynamiques.

L'étude de l'électricité et celle du magnétisme ont marché parallèlement jusqu'à ce siècle : les anciens connaissaient l'attraction de la pierre magnétique comme celle de l'ambre frotté ; Coulomb a découvert les lois de l'attraction magnétique comme celles de l'attraction électrique, et de l'identité de ces lois résulte une parfaite analogie entre les formules des actions électriques et magnétiques ; d'où deux points de vue et deux systèmes d'unités (électrostatique, électromagnétique) qui subsistent encore aujourd'hui. De même qu'on a imaginé 2 fluides électriques, on inventa 2 fluides magnétiques. Depuis Ampère, ces deux études jusque alors indépendantes se sont fondues dans l'étude des phénomènes électro-magnétiques. Nous étudierons d'abord les phénomènes purement magnétiques, les plus

anciennement connus, puis nous les rattacherons aux phénomènes électriques, conformément à la marche historique de la Science.

La première propriété connue des aimants est la direction constante qu'ils prennent quand ils sont libres. Si l'on prend une aiguille d'acier, qu'on détermine son centre de gravité, puis qu'on l'aimante et qu'on la suspende par son centre de gravité, elle prendra une direction constante, déterminée par 2 coordonnées angulaires.

L'axe Ox étant dirigé vers le Nord, l'axe Oy vers l'Ouest et l'axe Oz au nadir; OA étant la direction de l'aiguille, sa projection horizontale fait avec l'axe Ox (méridien géographique) l'angle δ, qu'on appelle *déclinaison*. La déclinaison se compte de 0 à 2π, du côté de l'Ouest; ou encore de 0 à π dans les deux sens (décl. occidentale positive, décl. orientale négative). Elle est aujourd'hui, à Paris, de 15° à l'Ouest. Le plan vertical où se trouve l'aiguille est le *méridien magnétique* du lieu; il fait avec le méridien géographique un angle égal à la déclinaison.

L'angle i que fait OA avec sa projection horizontale se nomme *inclinaison*. Il se compte de 0 à $\frac{\pi}{2}$ dans les deux

sens : positif quand le pôle Nord de l'aiguille est au-dessous de l'horizon, négatif quand il est au-dessus. L'inclinaison à Paris est de $+65°$.

En un même lieu, toutes les aiguilles aimantées ont même déclinaison et même inclinaison. La Physique du globe étudie comment la direction de l'aiguille aimantée varie, soit d'un lieu à l'autre, soit avec le temps.

On peut constater que l'aiguille aimantée est mue et dirigée, non par une force unique, mais par un couple : elle n'a aucune tendance à la translation, même libre. Le moment du couple directeur, M, dépend de 3 éléments : 1° d'un facteur $\mathfrak{M}$ (caractéristique de l'aiguille ; moment magnétique) 2° d'un facteur F caractéristique du champ ; 3° d'un facteur μ caractéristique du milieu ; suivant la formule :

$$M = \frac{\mathfrak{M}F}{\mu}.$$

Considérons seulement une des deux forces F du couple. Elle peut se décomposer en deux composantes, l'une verticale, l'autre horizontale, V et H, et l'on a :

$$\frac{V}{H} = \operatorname{tg} i$$

Si l'on équilibre par un contrepoids la composante V de manière à rendre l'aiguille horizontale, elle n'est plus soumise qu'au couple des forces H : le moment du couple est alors :

$$\frac{\mathfrak{M}H}{\mu} = \frac{\mathfrak{M}F}{\mu}\cos i.$$

Théorème. Quand une aiguille aimantée est assujettie à se mouvoir dans un plan vertical, son inclinaison est minima dans le méridien magnétique.

En effet, dans un plan vertical quelconque, faisant avec le méridien magnétique l'angle α, agissent : 1° la composante verticale V ; 2° une composante horizontale : $X = H \cos \alpha$.

Soit i' l'inclinaison de l'aiguille ; on a :

$\frac{V}{X} = tg\, i'$ au lieu de : $\frac{V}{H} = tg\, i$.

Donc : $tg\, i' = \frac{V}{H \cos \alpha} = tg\, i : \cos \alpha$.

Or $\cos \alpha \leq 1$, et atteint son maximum 1 pour $\alpha = 0$.

Donc $tg\, i' \geqslant tg\, i$, et a pour minimum $tg\, i$ quand $\alpha = 0$.

Dans le plan vertical perpendiculaire au méridien magnétique, la composante horizontale est nulle, donc l'aiguille est verticale : $\cos \alpha = 0$, $tg\, i' = \infty$.

Une aiguille ainsi disposée forme une boussole d'inclinaison. On peut s'en servir pour déterminer le méridien magnétique, soit en cherchant le plan d'inclinaison minima, soit (ce qui est plus exact) en cherchant le plan où l'aiguille est verticale, lequel est perpendiculaire au méridien magnétique.

On peut même se contenter d'observer l'inclinaison

de l'aiguille dans 2 plans rectangulaires quelconques.
En effet, on a dans le premier, comme on vient de le voir,

$$\cos\alpha = \frac{tg\, i}{tg\, i'}$$

et dans le second, pour la même raison:

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha = \frac{tg\, i}{tg\, i''}$$

Elevons au carré et ajoutons:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 = tg^2 i\left(\frac{1}{tg^2 i'} + \frac{1}{tg^2 i''}\right)$$

Cette relation peut s'écrire symétriquement:

$$cotg^2 i = cotg^2 i' + cotg^2 i''$$

Elle permet de calculer i, connaissant i' et i''.

Actions des aimants les uns sur les autres.

On appelle pôle Nord ou pôle austral d'une aiguille aimantée celui qui se tourne vers le Nord; pôle Sud ou pôle boréal, celui qui se tourne vers le Sud.
Les pôles de même nom se repoussent, les pôles de nom contraire s'attirent.

Coulomb a étudié les attractions et répulsions magnétiques avant les actions électriques: mais c'est après avoir inventé la balance de torsion pour mesurer celles-ci qu'il l'employa à la mesure des forces magnétiques.

Avant toute expérience il fallait mesurer le moment du couple directeur de l'aiguille. Pour cela Coulomb déterminait l'azimut où le fil se trouve en équilibre, en

y suspendant (à l'aide d'un étrier) une aiguille cylindrique d'acier non aimantée. Il amenait le zéro de la graduation en face de cette position. Puis il remplaçait l'aiguille par une aiguille aimantée, et faisait tourner tout l'appareil jusqu'à ce que celle-ci fût en face du zéro.

Le plan de torsion nulle coïncidait alors avec le méridien magnétique. Enfin il amenait l'aiguille aimantée à 90° (de ce plan) en tordant progressivement le fil. La force, mesurée par la torsion du fil, était égale à celle du couple directeur M, dont la direction était alors perpendiculaire à l'axe de l'aiguille.

Cela fait, Coulomb introduisait, à la place de la boule fixe, une aiguille fixe, verticale, dont le pôle austral était en regard du pôle austral de l'aiguille mobile, et correspondait au zéro de la graduation. L'aiguille mobile était déviée d'un angle α.

Elle est soumise à 3 forces : la répulsion magnétique à mesurer, F dirigée suivant OA ; la force directrice M, parallèle à OC ; enfin la force de torsion T du fil, suivant la tangente.

L'équation qui exprime la condition d'équilibre est donc :

$$M \sin\alpha + T = F l \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Coulomb trouva ainsi que la répulsion magnétique varie en raison inverse du carré de la distance des deux pôles (c à d sensiblement de l'angle α.)

Mais ces expériences sont sujettes à plusieurs causes d'erreur; d'abord parce qu'on réduit fictivement chaque aiguille à ses 2 pôles, où l'on suppose concentrée la force magnétique; ensuite, parce qu'il y a 4 pôles dans le système des 2 aiguilles, et qu'on ne tient compte que de l'action mutuelle des 2 pôles austraux. On admet que les autres actions sont négligeables, tant à cause de l'éloignement relatif des autres pôles qu'à cause de l'obliquité des lignes d'action. Néanmoins, elles suffisent à troubler les résultats obtenus par Coulomb; ils n'ont donc plus qu'un intérêt historique.

15e leçon

Coulomb, poussant plus loin encore le parallélisme des phénomènes électriques et magnétiques, a appliqué à ceux-ci la méthode dynamique, et a mesuré les forces magnétiques au moyen des oscillations du pendule.

Pour déterminer, d'abord, le moment du couple directeur sur une aiguille aimantée (boussole d'inclinaison dans le plan du méridien magnétique), on écarte l'aiguille de sa position d'équilibre; dans le cas où les

oscillations sont infiniment petites, la durée d'une oscillation double est donnée par la formule :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{M}}$$

Si, comme Coulomb, on emploie une aiguille suspendue horizontalement (boussole de déclinaison), on a la formule :

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{M'}}$$

M' étant la composante horizontale du moment M.

Coulomb a ensuite appliqué cette méthode à déterminer la loi des actions magnétiques. Dans un champ magnétique on place une aiguille aimantée très courte suspendue à un fil sans torsion, de sorte que la force F qui agit sur elle en différents positions soit sensiblement la même qu'en ses son centre O. On s'arrange pour que la force F horizontale soit dans le plan du méridien magnétique. L'aiguille aimantée (de déclinaison) est soumise d'abord au moment du couple directeur :

$$M' = \frac{MH}{\mu}$$

H étant la composante horizontale du ~~couple~~ champ terrestre ; ~~la durée d'une~~ puis, quand on fait agir la force magnétique (égale et de sens contraire pour les 2 pôles) au nouveau couple :

$$M_1 = \frac{M(H+F)}{\mu}$$

et la durée d'oscillation devient alors :

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{M_1}}$$

En mesurant la durée des oscillations dans les deux cas, on ~~trouve~~ peut calculer le rapport $\frac{H}{H+F}$ et obtenir la valeur

de F' par rapport à H.

Ces expériences, bien qu'inexactes, suffirent à établir la loi des actions magnétiques aux yeux de Coulomb et de ses contemporains. Nous en trouverons bientôt une vérification indirecte, mais plus précise. Cette loi, que Coulomb appliquait aux pôles des aimants, se traduit par la formule suivante :

$$F = \frac{mm'}{\mu r^2}$$

où r est la distance des 2 pôles considérés, m et m' sont des coefficients propres à chacun des 2 aimants, et μ une constante caractéristique du milieu (analogue à la constante k relative aux diélectriques)

En admettant cette loi, on essayait d'expliquer la direction constante que prennent les aimants par l'hypothèse de l'aimant terrestre. On supposait placé au centre de la terre un aimant dont le pôle austral A serait dirigé vers le Sud, et le pôle boréal B vers le Nord. Les points où la ligne AB percerait la surface de la terre seraient les pôles magnétiques. Une aiguille A'B', en un point quelconque de la surface devrait tourner son pôle austral vers le N, son pôle boréal vers le S. et prendre une inclinaison déterminée par la distance respective de ses pôles à ceux de l'aimant terrestre.

A l'équateur (magnétique), par exemple, l'aiguille aimantée devrait être horizontale, et partout parallèle à l'aimant terrestre. On croyait ainsi pouvoir expliquer la déclinaison et l'inclinaison. Mais il est établi aujourd'hui qu'un aimant, et même deux aimants placés excentriquement à l'intérieur de la terre ne peuvent rendre compte des variations de la déclinaison et de l'inclinaison à la surface de la terre; on a été ainsi amené à les expliquer par des courants terrestres. Les pôles austral et boréal des aimants réels n'en ont pas moins conservé leur dénomination, ~~du~~ emprunté à la fiction de l'aimant terrestre, et opposée à leur véritable direction (p. 183.)

Jusqu'ici, nous avons considéré un barreau aimanté comme réduit à 2 pôles très voisins de ses extrémités. C'est qu'en effet, quand on le plonge dans la limaille de fer, on constate qu'elle ne s'attache qu'aux extrémités. Il semble donc que les pôles seuls de l'aimant soient capables d'attirer. Mais l'expérience de l'aimant brisé (que connaissait Coulomb) montre que le milieu de l'aiguille (une fois cassée) attire la limaille aussi bien que les extrémités. On peut répéter indéfiniment cette scission, tous les morceaux obtenus auront 2 pôles d'attraction. On est conduit à considérer un aimant comme un ensemble

d'aimants très petits, de dimensions moléculaires. Dans l'hypothèse des fluides magnétiques, on doit admettre que les fluides ne peuvent pas se séparer dans toute la masse d'un corps (comme les fluides électriques quand une extrémité du corps est chargée positivement et l'autre négativement), mais seulement au sein des éléments magnétiques. Enfin, pour expliquer le magnétisme rémanent de l'acier, opposé au fer doux qui ne garde pas l'aimantation, on a inventé le pouvoir coercitif, qui n'est qu'un mot, comme la virtus dormitiva.

En tout cas, puisque tous les aimants (naturels & autres) sont divisibles en aimants plus petits ayant deux pôles, on ne peut plus ~~s'en tenir~~ se contenter de les réduire à leurs pôles. On les considérera comme des agrégats d'aimants infiniment petits, que l'on pourra réduire, eux, à leurs pôles.

Cherchons donc l'action exercée par un aimant infiniment petit, conçu comme l'ensemble d'une masse magnétique $+m$ au point A (pôle austral) et d'une masse magnétique $-m$ au point B (pôle boréal.) Soit l la longueur (infiniment petite) AB. On appelle axe magnétique de l'aimant la direction BA (avec son sens). On suppose que son moment magnétique $M = ml$, et que les forces exercées par les 2 pôles obéissent à la loi

de Coulomb (On remarquera qu'on admet cette loi, non plus pour les aimants finis, mais pour les aimants infiniment petits.) Cherchons l'action de cet aimant sur l'unité de magnétisme (austral) placée en un point P, à la distance r du centre O de l'aimant, l'angle POA étant α. La force exercée par le pôle A sur le point P est, conformément à l'hypothèse:

$$F = \frac{m}{\mu r^2}$$

La force exercée par le ~~point~~ pôle B sur le point P est de même:

$$F' = \frac{-m}{\mu r'^2}$$

Pour calculer leur résultante, formons le potentiel de ces forces, suivant la règle générale: $V = \Sigma \frac{m}{\mu r}$.

$$V = \frac{1}{\mu}\left(\frac{m}{r} - \frac{m}{r'}\right) = \frac{m}{\mu} \times \frac{r'-r}{rr'}$$

L'angle APB étant infiniment petit, $(r'-r)$ est égal à BC, qui est égal d'autre part à $l \cos\alpha$ (infiniment petit); on peut donc égaler r et r'. Il vient donc:

$$V = \frac{ml\cos\alpha}{\mu r^2} = \frac{M\cos\alpha}{\mu r^2}$$

Tel est le potentiel élémentaire d'un aimant infiniment petit sur un point extérieur P de coord. pol. r et α.

De cette expression on va tirer les composantes de la force suivant le rayon vecteur OPY et une perpendiculaire PX:

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2M\cos\alpha}{\mu r^3}$$

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx} \qquad \frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{r} \text{ (car } dx = r\,d\alpha\text{)}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{M \sin\alpha}{\mu r^2} \qquad X = \frac{M \sin\alpha}{\mu r^3}$$

Connaissant les composantes, on peut évaluer la force :

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{M}{\mu r^3}\sqrt{4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$$

ou :

$$F = \frac{M}{\mu r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}$$

Il y a deux cas particuliers intéressants :

1° : $\alpha = 0$. $X_0 = 0$, $F_0 = Y_0 = \frac{2M}{\mu r^3}$

(1e position de Gauss)

2° : $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $Y_{\frac{\pi}{2}} = 0$, $F_{\frac{\pi}{2}} = X_{\frac{\pi}{2}} = \frac{M}{\mu r^3}$

(2e position de Gauss)

$X_{\frac{\pi}{2}}$ et Y_0 étant positifs, on voit que $X_{\frac{\pi}{2}}$ est la moitié de Y_0 et dirigé en sens contraire.

Il n'est pas possible de vérifier cette loi et notamment ces 2 résultats sur une seule masse magnétique. Mais si l'on prend une aiguille aimantée très petite et qu'on la mette à une grande distance de l'aimant AB (très petit lui-même), ses 2 pôles seront soumis à des actions sensiblement égales et opposées, qui formeront un couple.

L'aimant AB étant perpendiculaire au méridien magnétique, plaçons la petite aiguille aimantée sur l'axe BA.

(1e position de Gauss.) Au couple directeur terrestre ($m'H$) viendra s'ajouter le couple $m'Y_0$ dû à l'aimant fixe AB.

B A

Y_0 B' A' Y_0 H H

L'aiguille sera déviée dans la direction du couple résultant, et elle fera avec le méridien magnétique un angle β tel que :

$$tg\,\beta = \frac{Y_0}{H} = \frac{2M}{\mu r^3 H}$$

(2e position de Gauss)

Plaçons ensuite la petite aiguille aimantée sur la perpendiculaire au milieu du barreau AB.

H B' X X A' H B A

Le couple $m'X_{\frac{\pi}{2}}$ se composant avec le couple directeur $m'H$ produira une déviation β', et l'on aura :

$$tg\,\beta' = \frac{X_{\frac{\pi}{2}}}{H} = \frac{M}{\mu r^3 H}$$

On peut vérifier expérimentalement les lois de Gauss : on trouve en effet, dans chaque position, que $tg\,\beta$ varie en raison inverse du cube de la distance (des centres des 2 aimants), et que, à distance égale $tg\,\beta = 2\,tg\,\beta'$.

C'est la meilleure vérification de la loi de Coulomb appliquée aux aimants infiniment petits.

Seulement les formules établies pour les aimants infiniment petits ne s'appliquent pas rigoureusement aux aimants finis. Les formules exactes sont de la forme :

$$tg\,\beta = \frac{2M}{\mu r^3}\left(1 + \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^4} + \cdots\right)$$

Les coefficients A, B, ... sont fonctions des dimensions de l'aimant. On peut les calculer empiriquement et déterminer en même temps le nombre de termes qu'il faut prendre dans la série : on place le barreau AB à plusieurs distances différentes ; ~~et~~ l'on détermine 2, 3 coefficients par 2, 3 expériences ; et l'on cherche ~~s'ils~~ si les valeurs trouvées sont conformes aux autres expériences. Si toutes les expériences ne concordent pas, on prend un terme de plus, et un coefficient de plus.

Ces expériences servent surtout à évaluer les deux facteurs du couple directeur : $M' = \frac{MH}{\mu}$
M étant le moment magnétique de l'aiguille. En effet, on a vu que la durée d'une oscillation double est :
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{M'}}$$
Pour calculer M', il suffit de connaître le moment d'inertie Σmr^2 et de mesurer T. On a ainsi $\frac{MH}{\mu}$. D'autre part, si l'on mesure l'angle β ou sa tangente, on a par là : $\frac{2M}{\mu r^3 H}$
Connaissant r, on peut calculer $\frac{M}{\mu H}$: le quotient de $\frac{MH}{\mu}$ par $\frac{M}{\mu H}$ sera H^2 ; on connaîtra donc d'une part H, et de autre part le facteur $\frac{M}{\mu}$. On ~~sépare~~ obtient (en même temps et séparément) ainsi le facteur qui provient de la nature de l'aimant et du milieu, et le facteur H qui ~~caractérise~~ provient

du champ terrestre (composante horizontale du couple.)

Nous allons maintenant généraliser la loi de Coulomb en cherchant la force exercée par un corps magnétique de forme quelconque, ou encore le potentiel d'un système magnétique sur un point extérieur.

Pour cela, il faut faire des hypothèses sur la nature des aimants :

Si autour d'un point P d'un aimant on détache un élément de volume dv, on admet que son aimantation a une direction déterminée, et que son moment magnétique est un infiniment petit du même ordre que son volume :

$$dM = I\,dv = I\,dx\,dy\,dz$$

Le facteur I est une grandeur finie qu'on appelle : l'intensité d'aimantation dirigée du point P.

En outre, on admet que cette grandeur I varie d'une manière continue (en grandeur et en direction) d'un point à l'autre : en d'autres termes qu'elle est une fonction continue des coordonnées du point P.

Le potentiel (de l'aimant élémentaire) infiniment petit est, comme on sait : $dV = \dfrac{dM \cos\alpha}{r^2}$

Le potentiel total de l'aimant, sur le même point, sera :

$$V = \int \frac{dM \cos\alpha}{r^2} = \iiint \frac{I \cos\alpha}{r^2}\,dx\,dy\,dz$$

intégrale triple étendue au volume total de l'aimant.

Nous allons étudier deux cas particuliers intéressants.

1° Solénoïdes magnétiques. Un solénoïde magnétique est un corps aimanté qui a 2 dimensions infiniment petites; la 3e (droite ou courbe) s'appelle son axe. En chaque point l'intensité d'aimantation est dirigée suivant l'axe (tangente à l'axe), et, si la section normale à l'axe est σ, on a la relation:

$$I\sigma = P,$$

P étant une constante qu'on nomme la puissance du solénoïde.

Evaluons le potentiel du solénoïde AB par rapport à un point extérieur P, où se trouve placée l'unité de magnétisme. Divisons le solénoïde en éléments de volume par des plans normaux à l'axe. Le moment magnétique de chaque élément, de longueur dx, sera: $dM = I dv = I\sigma dx = P dx$.

Donc:
$$V = P\int \frac{\cos\alpha}{r^2}\,dx$$

Or, si l'on projette l'élément de l'axe dx sur le rayon vecteur issu du point P, qui fait avec lui l'angle α, on trouve:
$$-dr = dx\cos\alpha$$

Par suite:
$$V = P\int_{r_0}^{r_1} -\frac{dr}{r^2} = P\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right)$$

On voit que la valeur du potentiel au point P ne dépend pas

de la forme du solénoïde mais seulement de la position de ses extrémités. On pourrait donc réduire le solénoïde à ses extrémités, en plaçant une masse magnétique $+P$ en B et une masse $-P$ en A ; le potentiel sera encore le même :

$$V = \Sigma \frac{m}{r} = \frac{P}{r_1} - \frac{P}{r_0}$$

C'est ce qui explique qu'une aiguille aimantée puisse se réduire idéalement à ses 2 pôles, alors que l'expérience de l'aimant brisé montre qu'elle est également aimantée dans toute sa longueur.

Une aiguille aimantée n'est pourtant pas rigoureusement identique à un solénoïde car ses pôles ne sont pas exactement à ses extrémités. En général on peut se figurer un barreau aimanté comme un faisceau de solénoïdes qui, en vertu de leur répulsion mutuelle, s'épanouissent aux extrémités. ~~Comme~~ Chacun d'eux peut se remplacer par deux masses magnétiques placées à ses extrémités. Or si la plupart d'entre eux aboutissent aux faces terminales du barreau, quelques-uns aboutissent aux faces latérales ; toutes les masses magnétiques ne se trouvant pas sur chaque face terminale, le pôle correspondant se trouve en arrière de cette face.

Dans le cas particulier où l'aimantation d'un barreau est solénoïdale, on peut le remplacer par un ensemble de

masses magnétiques distribuées à sa surface.

Une aiguille très mince (droite ou courbe) aimantée suivant sa longueur représente un solénoïde.

Si un solénoïde forme une courbe fermée, les 2 pôles coïncident, donc leur action sur un point extérieur est nulle, quelle que soit l'intensité de l'aimantation. Si on sépare les 2 moitiés du solénoïde, on obtient deux aimants dont la puissance peut être considérable.

2° Feuillets magnétiques. Un feuillet magnétique est un corps aimanté qui a une dimension infiniment petite, et par conséquent se réduit à une surface. Son aimantation est normale à cette surface en chaque point; de plus, si e est l'épaisseur du feuillet en ce point, on a:

$$Ie = P,$$

P étant une constante qu'on nomme la puissance du feuillet.

Évaluons le potentiel d'un feuillet magnétique sur un point extérieur P. Décomposons-le en éléments cylindriques normaux à la surface. Le moment magnétique d'un élément dv (correspondant à l'élément de surface dS) sera: $dM = Idv = IedS = PdS$

Donc:

$$V = P\int \frac{dS \cos\alpha}{r^2}$$

α étant toujours l'angle du rayon vecteur avec la direction de l'aimantation, ici normale à la surface. Considérons l'angle solide de sommet P et de base ds : soit $d\omega$ son ouverture. Menons sa section droite par l'élément ds : sa surface sera :
$$d\sigma = r^2 d\omega .$$
D'autre part on a :
$$d\sigma = ds \cos\alpha .$$
Par conséquent :
$$V = P\int \frac{r^2 d\omega}{r^2} = P\int d\omega = P\omega ,$$
ω étant l'angle solide ayant pour sommet P et pour base le feuillet.

On voit que le potentiel du feuillet sur un point extérieur ne dépend que de son contour, et nullement de la forme qu'il peut prendre à l'intérieur du contour. Cette propriété curieuse fait pressentir qu'on pourra remplacer un feuillet magnétique par son contour parcouru par un courant électrique.

16e leçon

On a trouvé pour le potentiel d'un feuillet magnétique sur un point extérieur du côté de la face australe l'expression :
$$V = \frac{P\omega}{\mu}$$
ω étant l'angle solide de sommet P ayant pour base la face australe. Si le point P vient toucher cette face, l'angle solide ω devient égal à 2π : $V = \frac{2\pi P}{\mu}$.

Si le point P traverse le feuillet et passe du côté de la

face boréale, l'angle ω doit, par continuité, dépasser la valeur 2π : c'est l'angle solide extérieur au cône de sommet P ayant pour base la face boréale. Si P s'éloigne indéfiniment, l'angle solide intérieur du cône tend vers 0, et l'angle solide extérieur vers 4π. En résumé, quand le point P passe de $+\infty$ à $-\infty$ en traversant le feuillet de la face boréale vers la face australe, le potentiel varie de 0 à $\frac{4\pi P}{\mu}$.

On peut maintenant ~~déterminer~~ étudier le champ magnétique produit par un courant, et déterminer sa valeur par les expériences suivantes :

1e expérience. Si le fil suivi par le courant est replié étroitement sur lui-même de façon que les deux courants égaux et contraires coïncident sensiblement (soient infiniment rapprochés) dans toute leur longueur, ce fil double n'a pas d'action sur l'aiguille aimantée, quelle que soit sa distance et sa position. Le champ magnétique de ce courant est donc nul.

2e expérience, variante de l'expérience de Gauss. Les aimants étant dans la 2e position de Gauss, la déviation de A'B' est donnée par la formule : $tg\,\beta' = \frac{M}{\mu H r^3}$

Remplaçons l'aimant fixe AB par une boucle infiniment petite dont le plan est perpendiculaire à AB, donc

parallèle au méridien magnétique, et parcouru par un courant dans un sens tel que l'observateur d'Ampère ait le pôle austral A à sa gauche. Le reste du circuit est formé par un fil double, sans action magnétique. On trouve que la déviation de A'B' obéit à la loi :

$$tg\,\beta' = \frac{1}{v} \times \frac{Si}{\mu H r^3}$$

S étant la surface de la boucle, et i l'intensité du courant, affectée d'un signe (car la déviation change de sens quand on renverse le courant.) La forme de la boucle est indifférente, pourvu que ses dimensions soient infiniment petites par rapport à r. Quant à v, c'est un coefficient numérique.

On voit que le moment magnétique M de l'aimant AB est remplacé dans la formule par $\frac{Si}{v}$. On peut donc identifier la boucle fermée à un aimant dont le moment magnétique serait proportionnel à Si.

3e expérience, confirmant cette identification, et montrant qu'elle est vraie pour la propriété fondamentale des aimants. Si l'on suspend une boucle fermée suivie par un courant, elle se dirige sous l'influence du magnétisme terrestre comme l'aimant équivalent, de telle sorte que le courant soit ascendant à l'Ouest et descendant à l'Est. Le moment du couple directeur de l'aimant (horizontal) serait : $M' = MH$.

Celui du couple directeur de la boucle est : $\frac{Si}{v} H$.

<u>4e expérience</u>, autre variante de l'expérience de Gauss. Substituons maintenant la boucle à l'aimant mobile A'B', placé dans la 2e position. On trouve que la déviation de la boucle sous l'influence de l'aimant fixe obéit à la loi : $$tg\,\beta' = \frac{M}{\mu H r^3}$$
M étant toujours le moment magnétique de AB.

<u>5e expérience</u>. Si enfin on remplace les deux aimants AB, A'B', par deux courants fermés infiniment petits, la déviation se produit dans le même sens, et obéit à la loi : $$tg\,\beta' = \frac{1}{v} \cdot \frac{Si}{\mu H r^3}$$
les quantités S, i étant relatives à la boucle fixe.

On a ainsi tous les cas possibles d'actions des aimants sur les courants, des courants sur les aimants et des courants sur les courants, et elles sont soumises aux mêmes lois que les actions des aimants sur les aimants.

Ces lois ont été découvertes par Ampère (1824) qui y est arrivé par une voie toute différente : de l'expérience d'Œrstedt il a immédiatement conclu l'identité des courants et des aimants, et deviné les lois de leurs actions réciproques en conséquence de cette hypothèse.

Nous allons généraliser ces lois, obtenues pour des boucles infiniment petites, et imaginer des solénoïdes

et des feuillets électriques analogues aux magnétiques.

On remplacera chaque élément d'un solénoïde magnétique par un courant fermé infiniment petit, tel que :

$$\frac{i\,dS}{v} = dM$$

dM étant le moment magnétique de l'élément ; or on sait que :

$$dM = I\,dv = I\sigma\,dx = P\,dx$$

Toutes les boucles seront normales à l'axe du solénoïde magnétique et formeront un solénoïde électrique équivalent. Comme elles sont toutes traversées dans le même sens par le même courant, i est constante. Si l'on suppose donnés i et dx (longueur de chaque élément), on déterminera dS (aire de chaque boucle) par la relation :

$$\frac{i\,dS}{v} = P\,dx$$

Mais si dx est arbitraire, à chaque valeur de dx correspondra une ~~système~~ valeur de dS, de sorte qu'il y aura une infinité de solénoïdes électriques équivalents au solénoïde magnétique donné. L'aire des boucles sera proportionnelle à l'écartement dx de 2 boucles consécutives.

On sait comment on peut former un solénoïde avec un fil continu ; on sait aussi qu'il revient au même de l'enrouler en hélice sur une bobine et de le ramener au point de départ suivant l'axe de la bobine ; car les portions infiniment voisines d'un circuit, parcourues

en sens inverse par le courant, neutralisent leurs effets.
Les solénoïdes électriques peuvent se réduire à leurs pôles comme les solénoïdes magnétiques équivalents.
Ampère a le premier construit des solénoïdes et inventé leur nom. C'est Lord Kelvin qui a conçu les solénoïdes magnétiques à leur image.
D'autre part, on peut considérer un courant fermé quelconque comme équivalent à un feuillet magnétique ayant pour contour ce courant.
En effet, si l'on partage l'aire du contour par un quadrillé de fils doubles dont chacun est parcouru par 2 courants inverses d'intensité égale à celle du courant donné, on ne change rien au champ magnétique du courant extérieur, chacun des fils doubles ayant une action magnétique nulle. Mais, d'un autre côté, on peut décomposer tout ce réseau en mailles contiguës parcourues par des courants de même sens et de même intensité, et remplacer chacune d'elles (boucle infiniment petite) par un aimant de moment magnétique égal à $\frac{i\,dS}{v}$.
On peut donc remplacer le courant extérieur donné (au point de vue de son action magnétique) par l'ensemble de ces aimants élémentaires. Or cet ensemble est un feuillet magnétique. En effet, tous ces petits aimants

ont leur pôle boréal d'un même côté, et leur pôle austral de l'autre. En outre, la puissance du feuillet est constante : car on a d'une part : $dM = PdS$
et d'autre part, par construction : $dM = \frac{i\,dS}{v}$.
Donc la puissance est : $P = \frac{i}{v}$,
et comme i, elle est constante pour tous les aimants. (est constante pour toutes les mailles) C'est la puissance du feuillet.

En vertu de ces relations entre les courants et les aimants, des deux hypothèses des fluides électriques et des fluides magnétiques, une au moins est superflue. Ampère a proposé d'expliquer les phénomènes magnétiques en concevant chaque aimant comme composé d'aimants infiniment petits, et chacun de ceux-ci comme formé par un courant fermé infiniment petit.

Qu'y a-t-il au fond dans les molécules d'un aimant ? Est-ce un courant ou un aimant ? Cette question n'a pas de sens, car nous ne connaissons ni la nature de l'aimant ni celle du courant. Dire que chaque molécule est un aimant, ou dire qu'elle est le siège d'un courant, c'est énoncer deux affirmations équivalentes, entre lesquelles l'expérience ne peut décider.

Pourtant, on sait qu'un courant éprouve toujours une certaine résistance et dépense de l'énergie pour la vaincre ;

tandis qu'un aimant ne perd rien de son énergie avec le temps, et ne s'échauffe nullement. L'hypothèse des courants moléculaires est donc bien invraisemblable. Toutefois, on peut dire que ce sont des courants qui ne dépensent pas d'énergie et ne produisent pas de chaleur. Seulement, on ne sait pas si tout courant ne suppose pas une dépense d'énergie, ni, partant, si l'idée d'un courant qui ne dépense pas d'énergie n'implique pas contradiction : c'est une formule qui ne veut rien dire. En somme, aimants et courants sont de simples images qui nous permettent de prévoir les phénomènes et de calculer leur grandeur; et nous ne saurons jamais si ces images correspondent à quelque réalité. Peu importe à la science, puisque le résultat pratique est le même.

Systèmes d'unités électriques.

Supposons qu'on n'ait d'abord connu que les courants, et qu'en effectuant les expériences de Gauss sur des boucles on ait été amené à déterminer la constante $\frac{Si}{v}$. En appliquant ensuite la même méthode aux aimants, on définira le moment magnétique M comme égal à $\frac{Si}{v}$.

~~Si au contraire on connaissait d'abord que les aimants,~~

D'autre part, on peut réduire un aimant à deux masses magnétiques, de grandeur m, reliée au moment M par

(dis qu'au contraire   absolu

la relation :
$$M = ml$$
d'où :
$$m = \frac{M}{l} = \frac{Si}{lv}.$$
Ainsi les masses magnétiques peuvent se définir en fonction de l'intensité du courant électrique équivalent à l'aimant, et par suite de la quantité d'électricité transportée par ce courant.

Inversement, si l'on avait d'abord découvert et étudié les aimants, on aurait commencé par définir les masses magnétiques, puis on aurait exprimé en fonction de celles-ci, l'intensité du courant équivalent et la quantité d'électricité.

En résumé, on peut indifféremment partir de la quantité d'électricité pour aboutir à la quantité de magnétisme ou inversement, ces 2 quantités étant reliées par une série de formules exprimant autant de lois expérimentales.

Suivant qu'on part d'une extrémité ou de l'autre, on obtient le Système Electro-Statique ou le Système Electro-Magnétique d'unités électriques.

Dans le Syst. El. St. toutes les unités électriques dépendent de l'unité de masse électrique; dans le Sys. El. Mg., toutes les unités dépendent de l'unité de masse magnétique.

A priori, les deux systèmes se valent; mais en principe le Sys. El. St. paraît préférable, car les charges électriques

sont accessibles à l'observation et à la mesure (on peut obtenir des charges contraires sur les deux moitiés d'un corps, les séparer et les manier); tandis que l'on ne peut obtenir une masse magnétique séparée. Il est vrai que ~~les~~ tout solénoïde équivaut à 2 masses magnétiques égales et contraires placées aux 2 pôles, mais c'est là une fiction. Au fond, la quantité de magnétisme est une abstraction insaisissable.

Les deux systèmes d'unités sont indépendants du choix des unités fondamentales de longueur, de temps et de masse; toutefois, ~~nous~~ on les rapporte habituellement au système CGS. Nous allons exposer d'abord le

Système Electro-Statique CGS.

La masse électrique est définie par la loi de Coulomb:

$$f = k\frac{mm'}{r^2}$$

Supposons $m = m'$: $m = r\sqrt{\frac{f}{k}}$

On ~~adopte un~~ choisit l'unité de masse électrique de telle sorte que, dans le vide: $k = 1$. On a alors:

$$m = r\sqrt{f}$$

et par suite la relation entre les unités est la suivante:

$$Q = L F^{\frac{1}{2}}$$

Or: $$F = M L T^{-2}$$

Donc: $$Q = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$$

Il ne faut attribuer aux formules de dimensions aucune valeur objective. Elles indiquent comment la mesure d'une grandeur varie quand on change d'unités fondamentales. Elles ne servent qu'à transformer les formules numériques et n'ont rien à voir avec la nature des phénomènes. Aussi n'est-il nullement nécessaire que la même espèce de grandeurs ait toujours les mêmes dimensions; cela dépend des hypothèses et conventions adoptées, par exemple, de ce qu'on pose $k = 1$ dans le Sys. El. St. Les formules de dimensions n'auraient un sens réel que si le mécanisme était vrai, et si l'explication mécanique des phénomènes était la seule possible: car alors tous les phénomènes seraient mesurés par des longueurs, des masses et des temps. Mais c'est ce qu'on ne peut affirmer dans l'état actuel de la science: on ne sait pas si toute énergie est réductible à l'énergie mécanique, ou au travail.

17e leçon

Les formules de dimensions ont cet avantage qu'elles indiquent quelles grandeurs il faut mesurer pour avoir la valeur de la grandeur considérée, et à quelle puissance elles figurent dans son expression.

Par exemple, si dans la balance de Coulomb les 2 boules également chargées, exercent l'une sur l'autre une répulsion

de 4 dynes à la distance de 10 centimètres, leur charge sera mesurée par le nombre $10\sqrt{4} = 20$.

Nous allons évaluer toutes les autres unités électriques et magnétiques en fonction de l'unité de masse électrique; nous désignons par des minuscules les grandeurs mesurées dans le Sy. El. St, et par des majuscules les mêmes grandeurs mesurées dans le Sy. El. Mg.

La densité électrique solide ρ est définie par la formule.

$\rho = \frac{q}{v}$ Dimensions: $\frac{Q}{L^3} = \frac{\sqrt{F}}{L^2}$.

La densité électrique superficielle μ est définie par:

$\mu = \frac{q}{S}$ Dimensions: $\frac{Q}{L^2} = \frac{\sqrt{F}}{L}$.

Le potentiel électrostatique est défini par la formule

$V = \Sigma \frac{m}{r}$ $(k=1)$ Dimensions: $\frac{Q}{L} = \sqrt{F}$.

Ainsi la mesure du potentiel se ramène essentiellement à la mesure d'une force (il est proportionnel à sa rac. q.)

La méthode de mesure la plus élégante sera celle qui réduit le nombre des grandeurs à mesurer au minimum. Tel est ici l'électromètre sphérique de M. Lippmann dont la formule est (p. 169): $F = \frac{V^2}{8}$.

Dans l'électromètre de lord Kelvin, la formule est plus compliquée: $F = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{e}\right)^2$

d'où:

$$V_1 - V_2 = e\sqrt{\frac{8\pi F}{S}}$$

On a à mesurer outre F, e et S : seulement, ces deux derniers grandeurs disparaissent de la formule des dimensions, car $\frac{e}{\sqrt{S}}$ se réduit à un coefficient numérique.

La capacité électrique est définie par la formule :

$q = cV \quad c = \frac{q}{V}$ Dimensions. $\frac{Q}{V} = \frac{L\sqrt{F}}{\sqrt{F}} = L$.

Par exemple la capacité d'une sphère est égale à son rayon (p. 95.)

Aussi la méthode la plus élégante pour mesurer les capacités consiste à les comparer à celle d'une sphère.

La capacité d'un condensateur à plateaux est donnée par la formule : $C = \frac{S}{4\pi e}$

moins simple car il y entre 2 grandeurs à mesurer S et e, dont le rapport $\frac{L^2}{L}$ se réduit à la dimension L.

Pour passer du vide à un autre milieu, il faut introduire la constante diélectrique du milieu : $K = \frac{C'}{C}$

C étant la capacité du conducteur dans le vide, et C' sa capacité dans le milieu considéré. C'est le rapport de 2 grandeurs de même espèce, donc un simple nombre indépendant des unités fondamentales. On dit qu'il est de dimension 0 ($L^0 M^0 T^0$.) Ce fait caractérise le Sy. El. St. : il vient en effet de ce qu'on a posé : $k = 1$ ~~[illegible]~~ pour le vide, ce qui réduit tous les autres k à des coefficients numériques.

La pression électrostatique est définie par la formule :

$\tau = 2\pi\mu^2$ Dimensions : $\frac{F}{L^2}$.

L'énergie électrostatique s'exprime par la formule:

$W = \Sigma \frac{mm'}{r}$ Dimensions: $\frac{Q^2}{L} = LF$.

On aboutit au même résultat en partant de la formule:

$W = \frac{1}{2} \Sigma mV$ Dimensions: $QV = LF$.

On voit que les dimensions de l'énergie sont les mêmes que celles d'un travail, ce qui justifie l'assimilation de l'énergie électrique aux autres formes de l'énergie.

Passons aux grandeurs électriques relatives aux courants.

L'intensité d'un courant est la quantité d'électricité qu'il transporte en l'unité de temps; donc:

$i = \frac{q}{t}$ Dimensions: $\frac{Q}{T} = \frac{L\sqrt{F}}{T}$

La résistance se définit en fonction de l'énergie électrique par la loi de Joule: $W = Ri^2t$ d'où:

$R = \frac{W}{i^2t}$ Dimensions: $\frac{LFT}{L^2F} = \frac{T}{L}$

La résistance spécifique ρ est définie ~~par~~ en fonction de la résistance par la formule: $R = \rho \frac{l}{s}$ d'où:

$\rho = \frac{Rs}{l}$ Dimensions: $\frac{RL^2}{L} = RL = T$.

On passe aux grandeurs magnétiques par la formule qui exprime l'équivalence du moment magnétique d'un aimant et d'un courant: $M = \frac{Si}{v}$.

On convient de choisir l'unité de moment magnétique de telle sorte que le coefficient numérique v soit égal à 1.

Donc: $M = Si$ Dimensions: $L^2 I = \frac{L^3\sqrt{F}}{T}$

<u>La quantité de magnétisme</u> ou masse magnétique m se détermine en fonction du moment par la relation :
$M = ml$ $m = \frac{M}{l}$ Dimensions : $\frac{M}{L} = \frac{L^2\sqrt{F}}{T}$
~~L'intensité d'aimantation~~
<u>Le potentiel magnétique</u> se définit par la formule :
$V = \Sigma \frac{m}{r}$ Dimensions : $\frac{m}{L} = \frac{L\sqrt{F}}{T}$
<u>L'intensité d'aimantation</u> est définie par la relation :
$M = I d\mathrm{v}$ $I = \frac{M}{\mathrm{v}}$ Dimensions : $\frac{M}{L^3} = \frac{\sqrt{F}}{T}$
<u>La perméabilité magnétique</u> μ est définie par la loi de Coulomb : $f = \frac{mm'}{\mu r^2}$ ou, si $m = m'$;
$f = \frac{m^2}{\mu r^2}$ $\mu = \frac{m^2}{fr^2}$
Dimensions : $\frac{L^4 F}{T^2 F L^2} = \frac{L^2}{T^2}$
Ce sont les dimensions du carré d'une vitesse.
Nous avons laissé partout $\sqrt{F}$ dans ces expressions, en considérant, pour simplifier, la force comme une unité fondamentale. Pour exprimer les dimensions en unités du système CGS, il suffit de faire : $\sqrt{F} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$.

— Dans le <u>Système Électro-Magnétique</u>, on part de la loi de Coulomb pour les actions magnétiques qui détermine la quantité de magnétisme : $F = \frac{mm'}{\mu r^2}$
On convient de ~~prendre~~ choisir l'unité de magnétisme de telle sorte que l'on ait dans le vide : $\mu = 1$.
Dès lors, on sait d'avance que toutes les unités auront

des ~~grandeurs~~ dimensions différentes, puisque les dimensions de μ dans le Sy. El. St. sont $\frac{L^2}{T^2}$.

La quantité de magnétisme, étant définie par la loi de Coulomb, doit avoir les mêmes dimensions que la quantité d'électricité dans le Sy. El. St: $L\sqrt{F}$.

Le potentiel magnétique, défini par la même formule que le potentiel électrostatique, aura les mêmes dimensions:

$V = \Sigma \frac{m}{r}$ Dimensions: $\frac{L\sqrt{F}}{L} = \sqrt{F}$.

Le moment magnétique est alors défini par la formule:

$M = ml$. Dimensions: $L^2\sqrt{F}$.

L'intensité de aimantation est définie par la formule:

$M = I\,dv$ Dimensions: $\frac{L^2\sqrt{F}}{L^3} = \frac{\sqrt{F}}{L}$.

La perméabilité magnétique μ devient une constante numérique, de dimension 0; car elle se réduit au rapport de 2 nombres.

On passe aux quantités électriques par l'équation de Gauss: $M = \frac{Si}{v}$

Dans le Sy. El. Mg. comme dans le Sy. El. St. on convient de prendre $v=1$. La formule précédente détermine alors l'intensité du courant: $I = \frac{M}{S}$

Dimensions: $\frac{L^2\sqrt{F}}{L^2} = \sqrt{F}$.

La quantité d'électricité est enfin définie par la relation:

$Q = It$ Dimensions: $T\sqrt{F}$.

On en déduit aisément les dimensions de la densité électrique solide: $\frac{T\sqrt{F}}{L^3}$, de la densité électrique superficielle: $\frac{T\sqrt{F}}{L^2}$, de la pression électrostatique: $\frac{T^2F}{L^4}$.

La résistance est déterminée par la loi de Joule:
$W = Ri^2t \quad R = \frac{W}{i^2t}$ Dimensions: $\frac{FL}{FT} = \frac{L}{T}$.
Ce sont les dimensions d'une vitesse.

La résistance spécifique est définie par la formule:
$R = \rho\frac{l}{s} \quad \rho = R\frac{s}{l}$ Dimensions: $RL = \frac{L^2}{T}$.

La force électromotrice est déterminée par la loi d'Ohm:
$E = Ri$ Dimensions: $RI = \frac{L\sqrt{F}}{T}$

La force électromotrice étant égale à une différence de potentiel, le potentiel V a les mêmes dimensions.

La capacité électrique est définie par la formule:
$Q = CV \quad C = \frac{Q}{V}$ Dimensions: $\frac{T^2\sqrt{F}}{L\sqrt{F}} = \frac{T^2}{L}$.

Enfin la constante diélectrique est déterminée par la loi de Coulomb relative aux actions électriques $(K = \frac{1}{k})$
$f = k\frac{mm'}{r^2}$ ou si $m = m'$: $K = \frac{m^2}{fr^2}$.
Dimensions: $\frac{Q^2}{FL^2} = \frac{T^2F}{FL^2} = \frac{T^2}{L^2}$.
Ce sont les dimensions de l'inverse du carré d'une vitesse.
On pouvait s'y attendre, puisque dans le Sy. El. St. où l'on part de $k = 1$, on trouve: $\mu = \frac{L^2}{T^2}$, tandis que dans le Sy. El. Mg. on fait $\mu = 1$.

Quand on compare les formules des dimensions dans les

deux systèmes, on remarque qu'elles ne diffèrent que par une puissance du rapport $\frac{L}{T}$. Elles ne changent donc pas quand l'unité de masse varie, ou encore quand les unités de longueur et de temps varient dans le même rapport.

Les unités électriques du Sy. El. Mg. CGS se trouvent être beaucoup trop petites ou beaucoup trop grandes pour la pratique. Aussi a-t-on essayé d'en déduire un Système d'unités pratiques qui fussent des multiples exacts des unités théoriques CGS.

Pour cela, on conserve les relations suivantes, où l'on a réduit tous les coefficients numériques à l'unité :

$$Q = It = CE$$

Loi d'Ohm : $E = RI$

Loi de Joule : $W = RI^2t$.

On choisit arbitrairement les unités pratiques de résistance et de force électromotrice ; les autres s'en déduisent au moyen des relations précédentes, qui déterminent leur rapport aux unités El. Mg. CGS :

L'unité pratique de résistance est l'Ohm $= 10^9$ CGS.

L'unité pratique de force électrom. est le Volt $= 10^8$ CGS.

L'unité pratique d'intensité de courant est l'Ampère : et comme $I = \frac{E}{R}$, l'ampère vaut 10^{-1} CGS.

L'unité pratique de quantité d'électricité est le Coulomb: en vertu de la formule $Q = It$, il vaut aussi 10^{-1} CGS.

L'unité pratique de capacité électrique est le Farad; et comme on a: $C = \frac{Q}{E}$, le farad vaut 10^{-9} CGS. Cette unité étant encore très-grande on a adopté le microfarad (millionième de farad) qui vaut 10^{-15} CGS.

D'autres unités se sont introduites dans la pratique et l'industrie: par exemple, l'unité usuelle de quantité d'électricité est l'ampère-heure; et comme le coulomb correspond à la seconde, l'ampère-heure vaut 3600 coulombs.

Quand on a voulu réaliser les unités pratiques de résistance et de capacité pour avoir des étalons de ces grandeurs, on a trouvé diverses déterminations dont on a pris la moyenne par exemple, l'ohm a été représenté par une colonne de mercure de 1 mmq. de section et de 106 cm de longueur à 0°. Mais cette valeur moyenne était trop faible; on l'a corrigée en donnant à la colonne une longueur de 106,3. Cette valeur est encore inexacte; mais, comme on ne peut corriger indéfiniment l'étalon de résistance, on est convenu de définir l'unité pratique de résistance par cet étalon, sans se soucier de la définition théorique de l'ohm comme 10^{9} unités CGS. Par suite, le système d'unités pratiques a

rompent tout liens avec le système CGS, et les unités électriques appelées ohm, volt, ampère, coulomb et farad n'ont qu'une existence légale, sans fondement théorique.

18e leçon

On a souvent besoin de passer d'un système à l'autre, c.à.d. connaissant la valeur d'une grandeur mesurée dans un système, de trouver sa valeur dans un autre. Pour cela, il faut d'abord connaître les dimensions de la grandeur considérée dans chacun des systèmes. Par exemple, les dimensions de l'intensité d'un courant et de la force électromotrice sont respectivement :

dans le Sys. El. St. :

$$i = \frac{L}{T}\sqrt{F}$$

$$e = \sqrt{F}$$

dans le Sys. El. Mg. :

$$I = \sqrt{F}$$

$$E = \frac{L}{T}\sqrt{F}$$

Pour calculer le rapport des valeurs d'une même grandeur dans les 2 systèmes, on se sert des formules qui expriment les lois fondamentales, qui sont les mêmes dans les 2 systèmes. Par exemple, on a entre Q, I, E, R, C les relations suivantes :

$$q = it = ce \qquad Q = It = CE$$

$$e = ri \qquad E = RI$$

$$W = ri^2t = eit \qquad W = RI^2t = EIt$$

Si l'on connaît par ex. le rapport $\frac{q}{Q}$, on en déduit les

autres de proche en proche. Dans la 1re formule t étant le même nombre, on a : $\frac{q}{Q} = \frac{i}{I}$.

Dans la 2e formule de W (dont la valeur est la même dans les 2 systèmes), on a : $\frac{i}{I} = \frac{E}{e}$.

La loi d'Ohm donne : $\frac{e}{E} = \frac{i}{I} \times \frac{r}{R}$

d'où : $\frac{r}{R} = \left(\frac{e}{E}\right)^2 = \left(\frac{I}{i}\right)^2$

Enfin : $\frac{q}{Q} = \frac{c}{C} \times \frac{e}{E} = \frac{c}{C} \times \frac{Q}{q}$

d'où : $\frac{c}{C} = \left(\frac{q}{Q}\right)^2$

On obtient ainsi une chaîne de proportions entre les valeurs des diverses grandeurs dans les 2 systèmes :

$$\frac{q}{Q} = \frac{i}{I} = \frac{E}{e} = \sqrt{\frac{R}{r}} = \sqrt{\frac{c}{C}} = v$$

v étant un nombre constant qui a les dimensions d'une vitesse ; car : $\frac{i}{I} = \frac{L}{T}$.

Pour déterminer ce nombre v, il suffit de prendre la mesure absolue d'une même grandeur dans les 2 systèmes ; ~~et de calculer leur~~ on a donc une foule de méthodes pour évaluer v. Inversement, une fois v connu, on a immédiatement le rapport des valeurs d'une grandeur dans les deux systèmes, au moyen des formules précédentes.

On a trouvé, à $\frac{1}{200}$ près : $v = 3.10^{10}$

Or la vitesse de la lumière est en centimètres, à $\frac{1}{1000}$ près : 3.10^{10} (300.000 kilomètres.)

Cette coïncidence curieuse ne peut pas être fortuite : car

Les premières déterminations de v donnèrent 288000 kilomètres ; mais à mesure qu'on obtenait des résultats plus exacts et qu'on employait des méthodes plus précises les valeurs trouvées pour v se rapprochaient de la vitesse de la lumière. Ce seul fait donne lieu de présumer qu'il y a un lien entre la lumière et l'électricité, et qu'une théorie mécanique pourrait expliquer à la fois l'une et l'autre. La théorie électromagnétique de la lumière de Maxwell est un essai imparfait de ce genre d'explication.

Instruments de mesure électromagnétiques.

Se divisent en 2 classes : boussoles, électrodynamomètres.

1° Boussoles. Le principe des boussoles est l'expérience de Gauss, qui constitue le lien entre les phénomènes électriques et magnétiques. Si dans la 1e position de Gauss, on remplace l'aimant fixe AB par une boucle infiniment petite de surface S parcourue par un courant d'intensité i, la déviation β de l'aimant mobile A'B' est donnée par la formule $\operatorname{tg}\beta = 2\frac{Si}{Hr^3}$

($M = \frac{Si}{v}$, mais on prend $v = 1$ dans les 2 systèmes)

Connaissant H et ayant mesuré β, on en déduit :

$$i = \frac{Hr^3}{2S}\operatorname{tg}\beta$$

Telle est la mesure électromagnétique de l'intensité d'un courant,

en fonction de l'intensité horizontale H du champ magnétique terrestre.

Les boussoles sont fondées sur le même principe en remplaçant la boucle de courant ~~infiniment petite~~ par un circuit fermé de dimensions finies.

<u>La boussole des tangentes</u>, de Pouillet, réalise la 1e position de Gauss, avec un courant circulaire placé dans le plan du méridien magnétique, et une petite aiguille aimantée AB dont le centre P est sur l'axe du cercle O.

Cherchons le potentiel du courant sur le point extérieur P. En vertu de l'assimilation du courant à un feuillet, ce potentiel a pour expression: $V = I\Omega$ (v. p. 198 et 204.)
I étant l'intensité du courant, et Ω l'angle solide sous lequel on voit du point P la face australe du feuillet.
Supposons P du côté de la face australe: soit $PO = a$; et R le rayon du cercle (α l'angle OPM). L'angle solide Ω est la surface de la calotte sphérique de rayon 1 circonscrite par le cône P:

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

Or: $\cos\alpha = \frac{OP}{MP} = \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}$

Donc:

$$V = 2\pi I\left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)$$

La force exercée sur une masse magnétique +1 (pôle austral)

placé en P sera dirigé suivant OP prolongée :

$$F = -\frac{dV}{da} = \frac{2\pi I . R^2}{(a^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Supposons maintenant que l'aiguille aimantée placée en P ait un pôle austral $+m$, un pôle boréal $-m$: Chaque pôle sera soumis à la force mF de la part du courant, et à la force mH de la part du champ terrestre : ces 2 forces sont perpendiculaires l'une à l'autre, et la position d'équilibre sera déterminée par la formule :

$$tg\,\beta = \frac{mF}{mH} = \frac{F}{H} = \frac{2\pi I}{H} \times \frac{R^2}{(a^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Connaissant a, R et H, on mesure la déviation β et l'on calcule I (en unités électromagnétiques.)

Dans la plupart des boussoles, l'aiguille est placée au centre même du cercle ; alors $a=0$, et l'on a simplement :

$$tg\,\beta = \frac{2\pi I}{HR}$$

On a supposé jusqu'ici que l'aiguille était assez courte pour que la force sur chaque pôle fût sensiblement égale, dans n'importe quelle position, à la force au centre P. Dans la pratique, la longueur l de l'aiguille n'est pas négligeable et l'on en tient compte en introduisant dans la formule un facteur de correction qui est une série de puissances paires de l (formule due à Blanchet.) Il suffit d'en prendre ~~le 1er terme~~ les 2 premiers termes ; on a alors la formule :

$$I = \frac{H(a^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi R^2 \operatorname{tg}\beta}\left[1 - \frac{3}{16}\times\frac{R^2-4a^2}{4}\left(1-5\sin^2\beta\right)l^2\right]$$

Gaugain a eu l'idée de faire disparaître le terme en l^2 en posant: $R^2-4a^2=0$, $R=2a$, c'est-à-dire en plaçant l'aiguille à une distance $\frac{R}{2}$ du cercle. Mais cette disposition ingénieuse théoriquement n'est pas un perfectionnement pratique: car on ne sait pas si, en annulant le terme en l^2, on ne rend pas très grand le terme en l^4, de sorte que l'erreur commise peut être aussi grande mais inconnue et incorrigible. De plus, il y a une difficulté pratique qui vient de ce que le cadre de la bobine, au lieu d'être plat, doit être conique: et il est plus difficile d'enrouler régulièrement le fil, ce qui est une nouvelle cause d'erreur. Les appareils simples sont toujours préférables, parce qu'on peut aisément en découvrir les défauts et y remédier; de même, il faut employer des formules très simples, pour pouvoir faire les corrections avec sûreté et facilité.

On peut donner à la boussole des tangentes une autre disposition: au lieu d'une bobine large et plate, on emploie une bobine longue et étroite, d'axe perpendiculaire au méridien magnétique; au centre de l'aiguille se trouve suspendue une

petite aiguille aimantée. C'est un ensemble de boucles fermées juxtaposées; soit n le nombre de spires du fil par unité de longueur de l'axe; une tranche de 1 cm. équivaut à n boucles de courant, ou à n feuillets magnétiques. Si n est très grand (c.à.d. le fil très fin et les spires très rapprochées), on pourra, pour la commodité du calcul, considérer les spires comme continues, de sorte que dans une tranche inf. petite de longueur l'axe dx il y en aura ndx. Soit x la distance (pos. ou nég.) de la tranche au centre de la bobine et $2l$ la longueur totale de celle-ci. Le potentiel élémentaire d'une spire ou boucle sur le centre O est:

$$V = I\omega = 2\pi I\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) \text{(1)} \text{ (p. 220.)}$$

Intégrons entre les limites $-l$ et $+l$, pour avoir le potentiel total de la bobine par rapport à son centre (I est constante dans toutes les spires, donc sort du signe $\int$):

$$V = 2n\pi I \int_{-l}^{+l} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) dx$$

La force exercée sur une masse magnétique +1 placée au centre de la bobine sera: $F = -\frac{dV}{dx}$

dx étant le déplacement de cette masse suivant l'axe. Or la même variation de potentiel dV peut être obtenue

---

(1) Et par conséquent celui de la tranche dx, contenant ndx spires:

$$dV = 2n\pi I\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) dx.$$

en transportant une tranche de longueur dx d'un bout à l'autre de la bobine; il faut donc faire dans la dérivée $x = +l$, $x = -l$, et prendre la différence:

$$F = -2n\pi I\left(1 - \frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}} - 1 - \frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}}\right) = \frac{4n\pi I l}{\sqrt{R^2+l^2}}$$

Dans le cas particulier où la bobine a une longueur infinie, on a: $\lim \frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}} = 1.$

La force prend alors une expression très simple:

$$F = 4n\pi I.$$

Cette formule est applicable, par approximation, aux bobines très longues par rapport à la longueur de l'aiguille: 50 cm par ex. Le facteur $\frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}}$ se traduit par un coefficient numérique de correction (constante instrumentale.)

Cela posé, et en supposant la longueur de l'aiguille négligeable par rapport au diamètre de la bobine, la déviation β est donnée par la formule (cf. p. 221):

$$tg\,\beta = \frac{F}{H} = \frac{4n\pi I}{H} \times \frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}}$$

d'où l'on tire la valeur de I en fonction de H.

Cette forme de boussole des tangentes a été imaginée par M. Lippmann.

Toutes les boussoles supposent qu'on a la mesure absolue de H, par ex. par l'expérience de Gauss. C'est l'inconvénient de cette méthode, de faire intervenir un facteur météorologique

variable. Pour effectuer une mesure ~~exacte~~ précise il faut mesurer H au moment même où l'on effectue la mesure d'intensité, ce qui demande deux opérateurs; ou bien il faut mesurer H avant et après l'expérience d'intensité, et prendre la moyenne des deux résultats comme valeur probable de H au moment de l'expérience (en vertu de la continuité des phénomènes naturels, et de la proportionnalité des variations infiniment petites.) Théoriquement, on ne peut répondre ni de l'exactitude du résultat, ni même du degré d'approximation. Les électrodynamomètres ont l'avantage de se passer du champ terrestre, et de mesurer l'intensité du courant par son action sur lui-même: ces instruments se suffisent donc à eux-mêmes et fournissent une mesure absolue par une seule expérience.

Les galvanomètres sont des instruments de mesure relative des intensités de courant. Le cadre où est enroulé le fil étant de forme quelconque, on ne sait plus quelle est la grandeur absolue de la force; on sait seulement qu'elle est perpendiculaire au plan du courant et proportionnelle à l'intensité:

$$F = mg\,I$$

m étant la masse magnétique d'un pôle de l'aiguille, et g une constante instrumentale. Si la longueur de l'aiguille

était très petite, on pourrait encore avoir une formule de tangente :
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{mg\,I}{m\,H} = \frac{g\,I}{H}$$
l'intensité à mesurer serait proportionnelle à la tangente.
On pourrait ~~déterminer~~ empiriquement le coefficient g par comparaison avec un instrument de mesure absolue.

Mais en général on ne s'astreint pas à employer une aiguille très-courte. Alors la force varie en grandeur et en direction par suite de la déviation, et l'on n'a plus une tangente proportionnelle à l'intensité, ni même une formule de tangente.

Aussi on ne peut employer le galvanomètre qu'avec de faibles déviations, ou encore par une méthode qui ramène toujours au zéro. Avec de faibles déviations, on peut encore obtenir des mesures précises par la méthode de Gauss Poggendorf pour la mesure des angles.

La méthode du zéro est employée dans le galvanomètre différentiel, où l'on fait passer en sens inverse 2 courants, l'un constant, à mesurer, l'autre variable à volonté et d'intensité connue. On règle ce dernier de manière à ramener l'aiguille au zéro : les deux courants sont alors égaux et contraires.

19e leçon.

Un galvanomètre très sensible est celui de Melloni et Nobili, avec son aiguille astatique qui diminue énormément l'action du magnétisme terrestre et par suite augmente les déviations de l'aiguille pour une intensité donnée.

Un galvanomètre plus sensible encore a été imaginé par Lord Kelvin : son système astatique est composé non plus de 2 aiguilles longues, mais de 2 faisceaux d'aiguilles courtes, parallèles et de même sens dans chacun, les pôles des 2 faisceaux étant contraires. Chaque faisceau est mobile au centre d'une bobine ; les deux bobines sont parcourues en sens inverse par le même courant, de sorte que leurs actions sur le système s'ajoutent.

Lord Kelvin avait cherché la forme la plus favorable à donner aux bobines ; mais il est plus commode de leur donner simplement la forme circulaire.

M. Weiss a encore perfectionné cet instrument en formant le système astatique de 2 aiguilles aimantées <u>verticales</u> et accolées en sens inverse, <u>ab</u>, <u>b'a'</u>. Chaque aiguille pouvant se réduire à ses 2 pôles, ce système équivaut à l'ensemble de 2 aiguilles horizontales très courtes : <u>ab'</u>, <u>ba'</u>. Or des aiguilles longues sont capables

d'une aimantation bien plus forte que les aiguilles courtes. Par cet ingénieux artifice on obtient des aimants à la fois puissants et très-courts, qui conviennent aux galvanomètres sensibles, car ceux-ci doivent avoir de faibles dimensions.

2° Electrodynamomètres.

Un électrodynamomètre se compose essentiellement d'une grande bobine fixe et d'une petite bobine mobile parcourues par le même courant : l'effet produit est indépendant du magnétisme terrestre et proportionnel au carré de l'intensité du courant, de sorte qu'un tel instrument suffit à lui seul à fournir une mesure absolue de cette intensité.

L'électrodynamomètre absolu de M. Pellat est une balance : la bobine fixe a (théoriquement) une longueur infinie, et son axe est perpendiculaire au méridien magnétique ; la bobine mobile, placée à son intérieur, a son axe vertical et est portée par un fléau de balance : celui-ci est en équilibre dans la position horizontale quand le courant ne passe pas (il porte un trait de repère qu'on vise avec un microscope muni d'un micromètre oculaire.) Quand le courant passe, la bobine est déviée : on rétablit l'équilibre dans la position horizontale au moyen de poids dans le plateau

Nous allons chercher la relation qui existe entre ces poids et l'intensité du courant I dans les 2 bobines.

L'intensité du champ magnétique produit par le courant à l'intérieur de la grande bobine est la force (v. p. 224): $F = 4n\pi I$. (n, nombre de spires par unité de longueur)

Supposons la petite bobine remplacée par l'aimant équivalent, de longueur l et de pôle m; son moment magnétique est: $M = ml$.

La force qui agit sur le pôle austral est $+mF$, sur le pôle boréal, $-mF$: l'aimant est donc soumis à un couple dont le moment est: $mlF = MF$.

Revenons à la bobine: chaque spire, ayant une section S, équivaut à un aimant de moment SI; soit N le nombre total des spires de la petite bobine, son moment magnétique est: $M = NSI$

et elle est soumise à un couple dont le moment est:

$$MF = 4n\pi NSI^2$$

Ce couple est équilibré par les poids P mis dans la balance; soit L_1 la longueur du bras de fléau; leur moment est PL_1, et par conséquent l'équation d'équilibre est:

$$PL_1 = 4n\pi NSI^2$$

d'où:

$$I = \sqrt{\frac{PL_1}{4n\pi NS}}$$

On voit que I est proportionnelle à $\sqrt{P}$.

Si, au lieu d'une bobine infiniment longue on emploie une bobine finie on n'a qu'à ajouter le facteur correctif $\frac{l}{\sqrt{R^2+l^2}}$ (v. p. 224.)

On a aussi supposé la bobine mobile infiniment petite; si l'on emploie une bobine finie on doit introduire un autre facteur correctif constant. En somme on obtient la formule pratique: $I = K\sqrt{P}$

K étant une constante instrumentale. Si on la calcule en fonction des dimensions et conditions de construction de l'appareil, ce sera un instrument de mesure absolue primitif; si on la détermine empiriquement par comparaison avec un autre instrument de mesure absolue ce sera un instrument secondaire ou dérivé. L'instrument primitif de M. Pellat a une bobine de 75 cm. de longueur. Les instruments secondaires ont des bobines de 10 à 20 cm.

Si l'on ne veut avoir que des mesures relatives, il est évidemment inutile d'évaluer la constante instrumentale.

Dans tous les cas, le magnétisme terrestre n'intervient pas; car le couple directeur agissant sur la bobine mobile est annulé par la résistance du couteau de la balance. ?

Un électrodynamomètre relatif est celui de Weber, qui est l'inventeur de ces sortes d'appareils. La bobine fixe a son axe perpendiculaire au méridien magnétique; la bobine mobile

est suspendue de manière que son axe soit horizontal et en équilibre dans le plan du méridien magnétique. Quand le courant passe dans les deux bobines, leurs axes tendent à devenir parallèles: et comme ils sont perpendiculaires, la bobine mobile est soumise à un couple maximum. La disposition est donc la même que dans la boussole des tangentes; seulement la suspension est bifilaire (~~ce qui~~ elle sert à amener le courant dans la bobine mobile), ce qui produit en même temps un couple antagoniste beaucoup plus fort que le couple directeur terrestre.

Cherchons les conditions de l'équilibre de la bobine sous l'action de ces 3 couples. Soit α l'angle ~~dont~~ que son axe fait avec le méridien magnétique; soit $M = gI$ le moment magnétique de la bobine mobile: le moment du couple terrestre horizontal sur cette bobine sera MH, et sa composante efficace:

$$MH \sin\alpha = gHI \sin\alpha.$$

Le moment du couple dû à la suspension bifilaire est aussi

? proportionnel au sinus de l'angle d'écart: $K \sin\alpha$

p. 25. Le moment du couple exercé par la bobine fine sur la bobine mobile est ~~proportionnel~~ le produit des moments magnétiques des 2 bobines:

$$GI \times gI = GgI^2$$

qu'il faut multiplier par $\cos\alpha$ pour avoir sa composante efficace. L'équation de l'équilibre sera donc:

$$Gg I^2 \cos\alpha = gHI \sin\alpha + K \sin\alpha$$

d'où:

$$tg\alpha = \frac{Gg I^2}{gHI + K}$$

G, g et K sont des constantes instrumentales; on mesure H et α, et l'on en déduit l'inconnue I. Si K est très grand par rapport à gHI, la formule se simplifie:

$$tg\alpha = \frac{Gg}{K}\frac{I^2}{H}$$

on n'a plus besoin de mesurer H. ~~En mesurant~~ Si l'on savait mesurer avec précision une faible déviation, on pourra rendre le moment du bifilaire assez grand pour que H soit négligeable (car cela diminue nécessairement la sensibilité de l'appareil.)

On peut éliminer H par un autre artifice. Si l'on renverse le sens du courant, I change de signe, mais non I^2; on a une déviation α' différente de α, suivant la formule:

$$tg\alpha' = \frac{Gg I^2}{K - gHI}$$

Du rapprochement des 2 formules on conclut:

$$\cot g\alpha + \cot g\alpha' = \frac{2K}{Gg I^2}$$

formule indépendante du magnétisme terrestre. Ainsi moyennant 2 expériences, cet instrument se suffit à lui-même et n'a pas besoin d'une mesure auxiliaire.

— Nous allons maintenant indiquer les méthodes qui permettent de mesurer les résistances et les forces électromotrices en unités électromagnétiques.

Pour mesurer une résistance en valeur absolue on peut

combiner une mesure électromagnétique d'intensité avec une mesure calorimétrique. En effet, l'énergie dépensée dans un fil de résistance R par un courant d'intensité I (pendant un temps t) est donnée par la loi de Joule: $W = RI^2t$, et la quantité de chaleur équivalente par la formule:

$$Q = \frac{1}{J} RI^2t.$$

On fait passer le courant pendant le temps connu t; on mesure I par un électrodynamomètre, Q par un calorimètre; on en déduit la valeur absolue de R.

Pour mesurer une force électromotrice en valeur absolue, on emploie la loi d'Ohm: $E = RI$. On mesure I, puis R par la méthode précédente: on en déduit la valeur absolue de E.

Mais les mesures calorimétriques sont longues et relativement peu précises. Aussi la mesure absolue des résistances et des forces électromotrices se fait-elle par d'autres méthodes, fondées sur les lois de l'induction, qui permettent de remplacer le calorimètre par d'autres instruments. Théoriquement, l'électrodynamomètre reste le fondement des mesures électromagnétiques comme l'électromètre est celui des mesures électrostatiques.

Passons aux procédés de mesure relative.

La comparaison des résistances entre elles est fondée sur une

application des lois de Kirchhoff : pont de Wheatstone.

R et R' connues, fixes ; r inconnu, à mesurer ; r' connu et variable. On règle r' de manière à amener le galvanomètre au zéro : on a :

C, r, R, A, G, B, r', R', D, P

$$\frac{r}{r'} = \frac{R}{R'}.$$

En effet, la loi de Kirchhoff appliquée aux 2 triangles donne :

$$ir - i'r' = 0 \qquad iR - i'R' = 0$$

d'où :

$$\frac{r}{r'} = \frac{i'}{i} = \frac{R}{R'}.$$

Cette méthode suppose qu'on dispose de résistances variables à volonté. Deux espèces d'appareils répondent à ce besoin :

1° Rhéostats : inventés par Pouillet. Le plus simple des rhéostats consiste en 2 fils semblables tendus parallèlement sur une règle divisée, sur

A, E, C, B, F, D

lesquels peut glisser un pont conducteur EF muni de contacts. Le courant arrivant par A, B, on peut faire varier à volonté la longueur du circuit et par suite sa résistance. Si les fils sont bien réguliers, la résistance sera proportionnelle à la longueur : il suffira de connaître la résistance de l'unité de longueur du fil. Les rhéostats ont l'avantage théorique de faire varier la résistance d'une manière continue ; mais cet avantage est illusoire en pratique, car les contacts E et F

ne sont jamais réguliers ni précis, et l'on ne sait pas exactement quelle est leur résistance.

2° <u>Boîtes de résistances</u>. Ce sont des collections de bobines disposées en série; seulement, les deux extrémités de chaque bobine communiquent avec deux plaques entre lesquelles on peut enfoncer une cheville conductrice, de résistance négligeable (à cause de la grande surface de contact.) La pose de cette cheville exclut la bobine du circuit, car le courant se répartit en raison inverse des résistances. Quand toutes les chevilles sont placées, la résistance de la boîte est nulle (presque); quand on en retire quelques-unes la résistance est la somme des résistances des bobines correspondantes. ~~Dans~~ La résistance de chaque bobine est graduée en <u>ohms</u>. Dans les boîtes en série linéaire, les résistances sont échelonnées comme les poids (1, 2, 2, 5, 10, 10, 20, 50, 100, etc.)

Dans les boîtes à cadre, une seule cheville commande une série de bobines égales (au nombre de 10); ~~suivant~~ si l'on place ~~la~~ la cheville au numéro 3, le courant passe dans 3 bobines, et si la résistance de chacune est 1 ohm, la résistance totale est de 3 ohms. De là il passe dans une série de 10 autres bobines, ~~la~~ chacune de résistance égale à 10 ohms:

Si l'on met la cheville au n° 5, on lui fait traverser une résistance de 50 ohms. Il y a de même une série de bobines de 100 ohms, et une autre de 1000 ohms, qui permettent d'~~évaluer~~ produire des résistances de centaines et de milliers d'ohms (jusqu'à 9999 ohms). On voit qu'avec 4 chevilles seulement on peut obtenir tout nombre d'ohms qu'on veut, de 0 à 10000 ; on écrit le nombre comme dans un tableau à colonnes.

Pour des mesures rapides, on emploie aussi des rhéostats avec des bornes disposées en cercle sur lesquelles tourne un contact glissant : mais ce contact étant moins parfait que celui des chevilles, la ~~procédé~~ mesure des résistances est moins exacte.

Toutes les bobines sont formées de 2 fils enroulés en sens inverse, pour éviter les phénomènes d'induction. Les fils sont en un alliage métallique (maillechort) dont la conductibilité varie 7 ou 8 fois moins que celle des métaux purs suivant la température (pour un métal pur, la résistance varie de $\frac{1}{273}$ par degré). De plus, les résistances sont mesurées à une température indiquée, 15°, qui est la température moyenne des laboratoires. On pourrait corriger les mesures de résistances effectuées à une autre température, mais quand on tient à tant de

précision, on préfère employer d'autres méthodes.

Pour vérifier la graduation des boîtes, on emploie des étalons dont la résistance est connue en valeur absolue. On a des étalons d'ohm constitués par un tube fin plein de mercure, joignant 2 vases pleins de mercure, le tout ayant une résistance de 1 ohm à 0°. On a aussi des étalons secondaires, formés de tubes remplis de mercure, représentant des multiples ou des fractions de l'ohm.

L'usage si fréquent du pont de Wheatstone a amené à fabriquer des boîtes de résistances comprenant les 3 branches connues du pont : les 2 résistances fixes (de 10, 100 ou 1000 ohms à volonté) et la résistance variable formée par la boîte de résistances proprement dite.

Mesure relative des forces électromotrices.

On emploie la méthode d'opposition.

Dans un fil bien régulier AB tendu sur une règle divisée, on fait passer le courant d'une pile bien constante P.

Par la section variable BC du même fil (au moyen du curseur C) on fait passer en sens inverse le courant produit par une force électromotrice quelconque Q, qui traverse aussi un galvanomètre G. On dispose le curseur C de manière à amener le galvano-

mètre au zéro, et l'on fait l'expérience en plaçant tour à tour en Q la force électromotrice $\underline{e}$ à mesurer et une force électromotrice connue $\underline{e}'$. Les résistances r, r' des sections BC et BC' interceptées sur le fil sont proportionnelles à leur longueur. Appliquons la loi de Kirchhoff au circuit qui contient la force électromotrice et le galvanomètre: le courant étant nul, la seule intensité sur BC est celle du courant de la pile P: c à d la courante $\underline{i}$; d'où les 2 équations:

$$e - ir = 0 \qquad e' - ir' = 0$$

d'où on en tire:

$$\frac{e}{e'} = \frac{r}{r'}$$

ce qui permet d'évaluer $\underline{e}$ par rapport à $\underline{e}'$ connue.

On prend pour terme de comparaison des piles-étalons: par exemple, l'élément Latimer-Clarke (mercure, sulfate de mercure, zinc, sulfate de zinc) dont la force électromotrice est très régulière, pourvu qu'elle ne fournisse pas de courant (1,457 volt.) On s'arrange pour placer d'avance le curseur à peu près au point où il doit être pour que le courant produit par Q soit nul. De plus, on remplace le galvanomètre par un électromètre, qui a l'avantage de ne pas fermer le circuit et de ne pas faire fonctionner la pile; en outre, il est beaucoup plus sensible que le galvanomètre à une différence de potentiel qui se traduit par un courant très faible.

Un autre étalon est la pile Gouy (zinc, sulfate de zinc, mercure, oxyde de mercure) dont la force électromotrice est 1,43. En général, on peut employer n'importe quelle pile à 2 liquides, pourvu que leur débit soit insensible et que par suite elles ne se polarisent pas (ce qui affaiblit le courant.) Pour cela, il suffit de leur donner une résistance énorme qui empêche le courant de passer. Par exemple, on composera un élément Daniell de 2 vases, l'un de sulfate de zinc contenant un bâton de zinc, l'autre de sulfate de cuivre contenant un bâton de cuivre, reliés par 2 siphons très fins plongeant dans une cuvette d'eau ordinaire. La résistance intérieure d'une telle pile est immense.

Courants variables.

Les lois des courants continus ne sont pas applicables sans restriction aux courants variables; par exemple, on ne peut pas affirmer que l'intensité soit la même au même instant en tous les points du circuit; cela est faux pour les conducteurs très longs ou très résistants (câbles transatlantiques) où la quantité d'électricité mise en jeu à une extrémité met un temps appréciable à se propager à l'autre bout, de sorte que la quantité d'électricité

qui passe en un point n'est pas égale à celle qui passe en un autre point.

De même, si une partie du circuit possède une grande capacité; par exemple, si 2 points du conducteur sont reliés à un condensateur : pour porter une armature du potentiel 0 au potentiel V, il faudra lui communiquer une quantité d'électricité CV : or cette quantité d'électricité sera arrêtée là et ne passera pas plus loin, de sorte que l'intensité du courant variable (pendant la charge du condensateur) sera plus forte en deçà du condensateur qu'au-delà.

Pour exclure ces cas embarrassants, nous admettrons que les conducteurs ont tous une faible résistance et une petite capacité. Dans ce cas, les lois de Joule et d'Ohm s'appliqueront au courant variable pendant un temps infiniment petit dt (où il peut être regardé comme constant):

$$E = RI \qquad dQ = \frac{1}{J} RI^2 dt.$$

C'est ce qu'on vérifie par l'expérience de Riess (p. 126), où la quantité de chaleur dégagée par un courant variable (provenant de la décharge d'un condensateur) est proportionnelle à la résistance.

20e leçon

Nous étudierons spécialement deux espèces de courants variables : 1° les courants oscillants (dont l'intensité oscille périodiquement autour d'une valeur moyenne) ; 2° les courants instantanés.

Pour un courant oscillant, la quantité d'électricité transportée pendant le temps $\underline{dt}$ est :

$$dQ = I dt,$$

I étant l'intensité à cet instant, et pendant le temps t :

$$Q = \int I dt$$

On appelle intensité moyenne ($\mathcal{I}$) d'un courant variable celle d'un courant constant qui transporte dans le même temps $\underline{t}$ la même quantité d'électricité :

$$Q = \mathcal{I} t \qquad \mathcal{I} = \frac{Q}{t} = \frac{1}{t}\int I dt$$

De même, le travail effectué par le courant pendant le temps $\underline{dt}$ étant : $dW = RI^2 dt$,
le travail effectué pendant le temps t sera :

$$W = \int RI^2 dt,$$

~~et~~ On appelle énergie moyenne d'un courant variable ($\mathcal{W}$) celle d'un courant constant qui produit le même travail dans le même temps $\underline{t}$:

$$\mathcal{W} t = W \qquad \mathcal{W} = \frac{1}{t}\int RI^2 dt = \frac{R}{t}\int I^2 dt,$$

R étant constante. Si l'on remplace l'intensité I par son

expression tirée de la loi d'Ohm, on a les intégrales:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{Rt}\int E\,dt \qquad W = \frac{1}{Rt}\int E^2 dt.$$

Dans les applications pratiques c'est l'intensité moyenne et l'énergie moyenne qu'il importe de connaître. On voit que pour cela il suffit de connaître les 2 intégrales

$$\int I\,dt, \qquad \int I^2 dt,$$

ou les 2 intégrales équivalentes:

$$\int E\,dt, \qquad \int E^2 dt.$$

On évaluera l'intensité moyenne et l'énergie moyenne en unités El. St. au moyen de l'électromètre et du calorimètre. En effet, le calorimètre reçoit à chaque instant une quantité de chaleur: $dq = \frac{1}{J} RI^2 dt$

et dans le temps t: $q = \frac{R}{J}\int I^2 dt$

On peut, en mesurant q, évaluer ainsi $\int I^2 dt$ ou $\int E^2 dt$.

D'autre part, l'électromètre permet d'évaluer $\int I\,dt$.
En effet, si l'on emploie l'électromètre à quadrants avec la disposition symétrique de M. Mascart, où $V_1 + V_2 = 0$, la formule de la déviation est: $\theta = -4AV_0V_1$. (p. 177.)

Supposons d'abord qu'un courant constant passe dans le fil AB: le point B communique avec le sol (potentiel 0), le point A avec l'aiguille de l'électromètre (potentiel inconnu V_0): on a: $V_0 = RI$,

R étant la résistance (connue) du fil AB. On calculera

l'intensité (constante) I au moyen de θ par la formule:

$$\theta = -4AV_1RI.$$

V_1 étant connu; on mesure θ.

Supposons maintenant que le même fil soit suivi par un courant oscillant avec une rapidité suffisante pour que l'aiguille n'ait pas le temps de se déplacer pendant une période. La déviation fixe θ mesurera alors l'intensité moyenne $\mathcal{I}$ du courant, et l'on aura la formule:

$$\theta = -4AV_1\frac{R}{t}\int I\,dt,$$

d'où l'on tirera $\int I\,dt$, et par suite $\int E_1\,dt$.

On peut encore évaluer les 2 autres intégrales au moyen de l'électromètre, mais avec une disposition différente: on met un couple de quadrants en communication avec le sol, et l'autre couple en communication avec l'aiguille et le point A du courant. On doit faire:

$$V_2 = 0, \qquad V_1 = V_0.$$

La formule est alors: $\theta = -AV_0^2$ (p. 177.)

Or: $V_0 = RI$ pour un courant constant; remplaçons I par l'intensité moyenne $\mathcal{I}$ du courant variable:

$$\theta = -AR^2\frac{1}{t}\int I^2\,dt$$

En mesurant la déviation θ (supposée constante), on peut calculer $\int I^2\,dt$, ou encore $\int E_1^2\,dt$, et par suite l'énergie moyenne en mesure Électro-Statique

Pour mesurer l'intensité moyenne et l'énergie moyenne en unités Électro-Magnétiques, on emploie la boussole des tangentes et l'électrodynamomètre.

Pour un courant constant, la déviation de la boussole des tangentes est donnée par la formule:

$$tg\theta = \frac{gI}{H}$$

Si le courant (variable) oscille assez rapidement pour que l'aiguille ne bouge pas, on aura l'intensité moyenne par la même formule:

$$tg\theta = \frac{g}{Ht}\int I dt$$

Dans l'électrodynamomètre de M. Pellat, par exemple, si le courant a l'intensité constante I et si le poids p rétablit l'équilibre, on a la relation: $I^2 = Ap$.

En supposant toujours la période assez courte pour que l'instrument ne bouge pas, on peut remplacer I^2 par sa valeur moyenne: $Ap = \frac{1}{t}\int I^2 dt$

On obtient ainsi $\int I^2 dt$, ou encore $\int E^2 dt$.

On peut aussi évaluer $\int I dt$ au moyen de l'électrodynamomètre. Pour cela, il faut faire passer dans la bobine fixe un courant constant d'intensité connue I_1, et dans la bobine mobile le courant variable qu'on étudie. Si ce dernier avait l'intensité constante I, elle serait donnée par la formule: $II_1 = Ap$.

L'intensité moyenne est donc donnée par la formule:

$$\frac{A\varphi}{I_1} = J = \frac{1}{t}\int I\,dt.$$

En général, tout phénomène dépendant de l'intensité d'un courant et proportionnel à cette intensité permet de mesurer les intensités moyennes; tout phénomène proportionnel au carré de l'intensité permet de mesurer les énergies moyennes.

~~On peut construire le graphique des intensités moyennes~~

Parmi les courants oscillants, les plus fréquents sont les courants <u>sinusoïdaux</u>, dont l'intensité varie selon la formule: $I = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right)$

T étant la durée d'une période. On peut représenter cette loi de variation par une courbe sinusoïde. L'intensité moyenne pendant un nombre entier de périodes est nulle; en effet, $\int I\,dt$ est représenté par l'aire de la courbe, les aires au-dessous de l'axe devant être comptées négativement; dans chaque période les 2 demi-périodes s'annulent. Au bout de n périodes plus une fraction l'intensité moyenne n'est pas nulle: car $\int I\,dt$ est égal à l'aire qui correspond à cette fraction de temps θ; mais comme on doit la diviser par $t\,(= nT + \theta)$ pour avoir l'intensité moyenne, celle-ci est très petite, et d'autant

plus petite que $\underline{t}$, c.à.d. $\underline{u}$, est plus grand. Ainsi l'intensité moyenne tend vers 0 quand le nombre des périodes augmente; et si ce nombre est très grand par seconde, et si l'instrument de mesure des intensités a des oscillations lentes, il marquera l'intensité moyenne d'un grand nombre de périodes, laquelle est nulle.

Au contraire, l'énergie moyenne n'est jamais nulle, car dans l'intégrale $\int I^2 dt$ tous les éléments sont positifs (ou nuls); cette intégrale est donc toujours positive, et va constamment en croissant avec le temps. Si l'on la prend sur un nombre suffisant de périodes et qu'on la divise par le temps, on aura l'énergie moyenne, et par suite la quantité de chaleur produite par le courant.

Ainsi les courants sinusoïdaux n'ont pas d'action sur la boussole des tangentes, mais ils en ont une sur l'électrodynamomètre.

Si l'on emploie les mêmes instruments à l'étude des courants qui varient lentement, ils indiqueront non plus l'intensité moyenne mais l'intensité à chaque instant. On peut alors construire le graphique des intensités, pour calculer l'intensité moyenne et l'énergie moyenne. On peut enregistrer automatiquement ce graphique en faisant tomber un rayon lumineux réfléchi par le miroir de

l'électromètre ou de la boussole des tangentes, sur un papier photographique qui se déroule avec une vitesse uniforme.

Les courants instantanés sont surtout obtenus par la décharge des condensateurs : leur durée est très courte, de l'ordre du 100.000^e de seconde.

On peut mesurer avec une boussole des tangentes la quantité d'électricité transportée par un courant instantané :

$$Q = \int I dt$$

Soit l la longueur de l'aiguille aimantée, m la charge magnétique d'un de ses pôles ; la force F qui s'exerce sur l'unité de magnétisme est proportionnelle à l'intensité du courant :

$$F = g I.$$

Supposons que pendant la durée du courant, Δt, l'aiguille tourne de l'angle $\Delta\alpha$: évaluons le travail effectué par la force F. La force qui s'exerce sur chaque pôle est mF, le déplacement est $\frac{1}{2} l\Delta\alpha$, donc le travail est :

$$\mathcal{C} = 2mF.\frac{1}{2} l\Delta\alpha = mgIl\Delta\alpha = MgI\Delta\alpha,$$

M étant le moment magnétique ml de l'aiguille, et I étant supposé constant. Remplaçons I par l'intensité moyenne $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{C} = \frac{Mg\Delta\alpha}{\Delta t}\int I dt = MgQ\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}.$$

Or $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ est sensiblement égale à $\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{dt}$, vitesse angulaire de l'aiguille au moment où le courant cesse (1). $\mathcal{C}$ est égal à la force vive de l'aiguille :

(1) En effet, la vitesse moyenne $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ peut être considérée comme la moyenne des vitesses initiale (0) et finale $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ de l'intervalle Δt.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\Sigma m v^2 = \frac{1}{2}\Sigma m r^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \Sigma m r^2$$

Posons: $\Sigma m r^2 = K$, moment d'inertie de l'aiguille; on a finalement l'équation:

$$\frac{1}{2} M g Q \frac{d\alpha}{dt} = \frac{K}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \qquad MgQ = K \times \frac{d\alpha}{dt} \qquad (1)$$

d'où l'on tirera Q en fonction de $\frac{d\alpha}{dt}$.

Pour évaluer $\frac{d\alpha}{dt}$, on note la déviation maxima α_1 que l'aiguille atteint ~~en tournant sous~~ (continuant à tourner) l'impulsion du courant instantané. La force vive due à la vitesse angulaire initiale est détruite à ce moment par le travail du couple directeur horizontal ~~terrestre~~. Or la force du magnétisme terrestre sur un pôle est mH: le déplacement du pôle dans sa direction est: $\frac{1}{2} l (1 - \cos\alpha_1)$; donc le travail du couple terrestre est:

$$2mH \cdot \frac{1}{2} l (1 - \cos\alpha_1) = MH (1 - \cos\alpha_1)$$

Or: $1 - \cos\alpha_1 = 2 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}$

Donc: $$\frac{K}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 2MH \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}. \qquad (2)$$

d'où l'on tire:

$$\frac{d\alpha}{dt} = 2 \sin\frac{\alpha_1}{2} \sqrt{\frac{MH}{K}}$$

Transportons cette valeur dans la première équation:

$$MgQ = 2K \sin\frac{\alpha_1}{2} \sqrt{\frac{MH}{K}} \qquad Q = \frac{2\sqrt{HK}}{g\sqrt{M}} \sin\frac{\alpha_1}{2}.$$

On a ainsi la quantité d'électricité en fonction de l'angle d'écart maximum α_1 de l'aiguille aimantée. Il faut en outre connaître son moment magnétique M, le moment horizontal terrestre H, son moment d'inertie K, enfin la constante instrumentale g.

Pour simplifier cette formule, on peut y introduire la durée d'oscillation de l'aiguille sous l'influence du magnétisme terrestre (p. 186): $T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{MH}}$ d'où: $\sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{T}{2\pi}\sqrt{H}$
La formule devient alors:

$$Q = \frac{HT}{\pi g}\sin\frac{\alpha_1}{2}.$$

Elle donne la valeur de Q en unités Electro-Magnétiques.
Elle est la méthode du galvanomètre balistique (1)

On pourrait employer la même méthode balistique avec un électromètre ou un électrodynamomètre.

L'expérience précédente fournit un moyen de déterminer le rapport des unités Electrostatiques et Electromagnétiques.

$$v = \frac{q}{Q}.$$

On charge un condensateur dans des conditions uniformes, par exemple, au moyen d'une force électromotrice constante et connue; la charge s'exprime par la formule (p. 99):

$$q = \frac{S}{4\pi e}(V_1 - V_2)$$

On mesure $(V_1 - V_2)$ au moyen de l'électromètre: connaissant S et e, on calcule la valeur absolue de q en unités El. St.
Puis on décharge le condensateur sur une boussole des tangentes: on détermine par la méthode précédente la valeur absolue de Q en unités El. Mg.

Au lieu de la méthode balistique, on peut encore employer

(1) ainsi appelé par analogie avec le pendule balistique.

un autre procédé. Si l'on décharge le même condensateur, uniformément chargé, n fois par seconde sur une boussole des tangentes, l'aiguille subira une déviation permanente, comme sous l'influence d'un courant périodique. La quantité d'électricité qui passe par seconde, nQ, est égale à l'intensité I du courant constant qui produirait la même déviation ; donc $\operatorname{tg}\theta = \frac{g\,nQ}{H}$.

Pour réaliser cette expérience, on emploie un diapason ~~fais~~dont on connaît le nombre n de vibrations par seconde, et qui met le condensateur en communication alternativement avec la pile qui le charge et le galvanomètre ou la boussole où il se décharge. Si n est compris entre 200 et 1000, la durée d'une vibration est largement suffisante pour la charge et la décharge du condensateur.

— Dans l'industrie, on emploie pour mesurer les forces électromotrices et les intensités les voltmètres et les ampèremètres. Ces appareils sont des galvanomètres fondés sur une double application de la loi d'Ohm.

Si la résistance d'un galvanomètre est très petite par rapport à celle d'un circuit, son introduction dans le circuit n'affaiblira pas sensiblement l'intensité du courant, et par suite

sa déviation mesurera cette intensité : c'est un ampèremètre.

Si au contraire la résistance R du galvanomètre est énorme par rapport à la résistance r des circuits où on l'intercale, l'intensité du courant qui le traversera sera égale à :

$$\frac{E}{R+r}, \quad \text{ou sensiblement à :} \quad \frac{E}{R},$$

et comme R est constante, elle sera proportionnelle à E. La déviation mesurera donc la force électromotrice : ce sera un voltmètre. On gradue empiriquement ces instruments en volts et en ampères, par comparaison avec des instruments de mesures absolues.

Un galvanomètre ordinaire serait trop délicat pour les usages industriels. On rend les galvanomètres transportables et indépendants du magnétisme terrestre en dirigeant l'aiguille par un fort aimant permanent fixé dans la boîte : la force du champ terrestre est négligeable par rapport à celle de cet aimant, de sorte que l'aiguille prend une direction invariable, quelle que soit la position de l'instrument. On diminue notablement par là sa sensibilité. Pour que la graduation empirique soit exacte, il faut que l'aimant directeur ait une intensité constante.

La définition du travail électromagnétique va nous acheminer directement à l'étude des phénomènes d'induction.

Travail électromagnétique.

Nous allons évaluer le travail des forces magnétiques dans un cas particulier. Soit une aiguille aimantée de longueur l, de pôle m, dans un champ magnétique uniforme, d'intensité constante F ~~perpendiculaire au méridien magnétique~~ (par rapport à la direction des forces magnétiques.
Elle est déviée (d'abord) d'un angle α. Supposons que la déviation augmente de $d\alpha$, et calculons le travail des forces magnétiques pour ce déplacement infiniment petit.

La force qui s'exerce sur chaque pôle est : mF.
Le chemin parcouru ~~dans~~ le sens de la force est $\frac{l}{2}\, d(\cos\alpha)$;
donc le travail total des forces sur les 2 pôles sera :

$$d\mathcal{E} = 2mF \cdot \frac{l}{2}\, d(\cos\alpha) = -\mathcal{M} F \sin\alpha\, d\alpha$$

~~travail~~ négatif, car les forces s'opposent à l'accroissement $\underline{d\alpha}$.

Remplaçons maintenant l'aimant par un courant fermé équivalent ayant pour axe AB : $\mathcal{M} = SI$.
Il vient : $d\mathcal{E} = -SIF \sin\alpha\, d\alpha$
Or le champ est uniforme, donc F est constante ; S aussi.

$$d\mathcal{E} = I\, d(FS\cos\alpha)$$

Or $FS\cos\alpha$ est le <u>flux de force magnétique</u> qui traverse la boucle ~~infiniment petite~~, soit $\mathcal{F}$; on a finalement :

$$d\mathcal{E} = I\, d\mathcal{F}$$

Si au lieu d'un courant élémentaire on a affaire à un courant fini, on le décomposera en ~~cour~~ circuits infiniment petits (cf. p. 203)

pour chacun desquels le travail élémentaire sera égal à $I\,d\,d\mathcal{F}$; or le flux total est égal à la somme des flux partiels, et le travail élémentaire total à la somme des travaux élémentaires partiels, de sorte qu'on aura encore pour un courant d'étendue finie la relation :

$$d\mathcal{C} = I\,d\mathcal{F}.$$

Nous admettrons que cette loi est générale, et nous la vérifierons par ses conséquences.

Pour avoir le travail qui correspond à un déplacement fini, il faut intégrer l'équation précédente; I étant constante sort du signe $\int$, et il vient :

$$\mathcal{C} = \int I\,d\mathcal{F} = I\int d\mathcal{F} = I(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0)$$

Ainsi le travail total ne dépend que de la position initiale et de la position finale du courant, puisqu'il suffit pour le calculer de connaître le flux de force en ces 2 positions.

21e leçon

Précisons le sens dans lequel le flux de force est compté par rapport au courant : α est l'angle que fait la force avec l'axe du courant du côté de la face australe, donc le flux de force est positif quand il entre par la face boréale (à droite du courant), et négatif quand il entre par la face australe (à gauche du courant.)

La formule du travail électromagnétique est analogue à

celle du travail électrostatique : $d\mathcal{E} = -dW$,

d'où : $$\mathcal{E} = W_0 - W_1 .$$

On voit que la quantité $-IF$ joue en Électrodynamique le même rôle que l'énergie W en Électrostatique.

On sait que l'on peut déduire de W la force exercée sur un corps électrisé : sa composante X dans la direction x est :
$$X = -\frac{dW}{dx}.$$

De même l'expression du travail en fonction du flux de force permet de trouver la force à laquelle est soumis un courant. Si le courant est assujetti à se déplacer suivant la direction x, la force qu'il subit est donnée par la formule :
$$X = \frac{d(IF)}{dx}.$$

<u>Exemple</u>. Cherchons la force exercée par un aimant infiniment petit AB sur un courant fermé infiniment petit dont l'axe est le prolongement de AB.

Soit r la distance CO, l la longueur AB ; $+m$ le pôle A, $-m$ le pôle B. La force exercée par le pôle A sur l'unité de magnétisme en O est : $\frac{m}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2}$. Donc ~~la force~~ le flux de force ~~exercée sur~~ qui traverse le courant (équivalent à un feuillet) de surface S est :
$$\frac{+mS}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2}$$

De même, ~~la force~~ le flux de force ~~exercée~~ envoyé par le pôle B ~~sur~~ à travers le courant ~~est~~ =
$$\frac{-mS}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}$$

Le flux de force magnétique total qui traverse le courant est donc : $\mathcal{F} = mS\left[\frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\right] = mS\frac{2rl}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}$

Or : $ml = M$ moment magnétique de l'aimant.

$$\mathcal{F} = 2MS\frac{r}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2\left(r+\frac{l}{2}\right)^2} = 2MS\frac{r}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2}$$

Si l'on suppose l infiniment petite par rapport à r, le dénominateur se réduit à r^4 ; on a alors simplement :

$$\mathcal{F} = \frac{2MS}{r^3}.$$

(On aurait pu obtenir ce résultat directement, sachant que la force F exercée par l'aimant inf. petit AB sur l'unité de magnétisme en O est : $\frac{2M}{r^3}$ [v. p. 191].)

Supposons maintenant le circuit parcouru par un courant d'intensité courante I positive, c.à.d. dans un sens tel que le flux de force soit positif (passe de droite à gauche du courant) : le courant est descendant en avant du tableau. Calculons la force X suivant la direction BA : $dx = dr$:

$$X = \frac{d(I\mathcal{F})}{dr} = I\frac{d\mathcal{F}}{dr} = -\frac{6MSI}{r^4}.$$

Cette force est attractive, et en raison inverse de la 4e puissance de la distance. Cela se comprend, car on a vu que le couple déviateur est en raison inverse du cube de la distance ; or la force de translation ~~est~~ étant la différence des 2 forces du couple, est infiniment petite par rapport à elles, et par conséquent infiniment petite du 4e ordre.

Phénomènes d'induction.

Nous venons d'étudier les lois des actions électromagnétiques, découvertes par Ampère. Vingt ans après lui, Faraday découvrit les phénomènes d'induction, qui ont élargi considérablement le champ de l'Electrodynamique. ~~On a prétendu que~~ Ces phénomènes sont conformes au principe de la conservation de l'énergie; mais ce principe ne pouvait suffire à les faire découvrir, comme on l'a prétendu. En effet, ces phénomènes sont caractérisés par la propriété particulière que voici:

Quand des circuits parcourus par des courants se déplacent les uns par rapport aux autres, le principe de la conservation de l'énergie s'applique à chacun d'eux pris isolément.

Or cette propriété ne peut évidemment se déduire du principe de la conservation de l'énergie, car celui-ci s'applique à l'ensemble des circuits en présence, ce qui fournit une équation; mais on n'a pas le droit, a priori, de l'appliquer séparément à chaque circuit, de manière à obtenir autant d'équations que de circuits. Cette propriété se déduit des lois expérimentales trouvées par Faraday et les résume toutes, de sorte que nous pouvons les en déduire à leur tour.

Considérons un circuit comprenant des forces électromotrices quelconques, constantes ou variables, dont la somme algébrique est E : on suppose que E varie de telle sorte que l'intensité I du courant soit constante. Soit R la résistance du circuit ; $d\mathcal{E}$, le travail élémentaire des forces électromagnétiques pour un déplacement infiniment petit du circuit. Supposons qu'il n'y ait pas d'autre énergie mise en jeu que la chaleur de Joule :

RI^2dt et le travail des forces électromagnétiques $d\mathcal{E}$.

Or :
$$d\mathcal{E} = I\,d\mathcal{F}$$
L'énergie dépensée est donc :
$$RI^2dt + I\,d\mathcal{F} = \left(RI^2 + I\frac{d\mathcal{F}}{dt}\right)dt$$
D'autre part, la force électromotrice E, pour produire par seconde l'unité d'électricité, consomme un travail égal à E ; pour produire la quantité d'électricité I, le travail est EI ; pendant le temps dt, le travail est EIdt. Appliquons le principe de la conservation de l'énergie au circuit en écrivant que ce travail est égal à l'énergie produite :
$$EI\,dt = \left(RI^2 + I\frac{d\mathcal{F}}{dt}\right)dt$$
$$E = RI + \frac{d\mathcal{F}}{dt} \qquad \text{ou :} \qquad I = \frac{E - \frac{d\mathcal{F}}{dt}}{R}$$
On voit qu'un courant en mouvement n'obéit plus à la loi d'Ohm : la force électromotrice est diminuée de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$;

autrement dit, le déplacement du circuit semble créer une force électromotrice égale à $-\frac{d\mathcal{F}}{dt}$. En réalité, c'est là une apparence: c'est la force électromotrice réelle E_1 qui fournit, outre le courant I, le travail $d\mathcal{C}$; c'est pourquoi l'intensité du courant baisse comme si la force électromotrice E_1 était diminuée de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$.

La relation précédente est vraie quelle que soit la valeur de E_1: en particulier, pour $E_1 = 0$, on a simplement:

$$I = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\mathcal{F}}{dt}$$

c. à d. que tout se passe comme s'il y avait dans le circuit la force électromotrice $-\frac{d\mathcal{F}}{dt}$. Ainsi le mouvement suffit à créer un courant dans un circuit ne contenant aucune force électromotrice. C'est là un fait d'expérience que rien ne pouvait faire prévoir: un circuit conducteur, se déplaçant dans un champ magnétique, est parcouru par un courant, donc s'échauffe et dépense de l'énergie.

— Considérons d'abord un circuit fermé d'aire S, placé dans le champ magnétique terrestre perpendiculairement à l'aiguille d'inclinaison: soit F la force magnétique terrestre, le flux de force qui traverse le circuit est:

$$\mathcal{F} = FS.$$

Transportons le circuit parallèlement à lui-même, le flux de force ne change pas, donc aucun courant ne se produit.

Faisons au contraire tourner le circuit d'un angle $< 90°$; le flux de force diminue, donc il se produit un courant de sens positif (tel que le flux passe de droite à gauche) : car si : $\frac{dF}{dt} < 0$, $I > 0$.

$-\frac{dF}{dt}$ s'appelle la force électromotrice d'induction.

Il est facile de trouver la quantité d'électricité produite quand le circuit a tourné de $90°$: car le flux de force, est devenu nul, donc sa variation est $-FS$. Or :

$$Q = \int I dt = \frac{1}{R}\int E dt = -\frac{1}{R}\int \frac{dF}{dt} dt$$

L'intégrale de dF, prise entre les limites SF et 0, est $-SF$; donc :

$$Q = \frac{FS}{R}.$$

La quantité d'électricité est en raison inverse de la résistance du circuit, proportionnelle à son aire et à l'intensité du magnétisme terrestre.

Si l'on continue à faire tourner le circuit de $90°$, la quantité d'électricité produite dans le 2e quart de tour sera égale à celle produite dans le 1er : car le flux, devenant négatif ($-SF$) varie dans le même sens et de la même quantité $-SF$.

Si l'on fait tourner le circuit autour d'un axe ~~horizontal~~ vertical, la ~~force~~ composante efficace de la force sera H, donc le flux utile sera SH. La quantité d'électricité produite pendant 1 demi-tour (le flux étant nul au début et à la fin) sera :

$$Q = \frac{2SH}{R}.$$

Si l'on fait tourner le circuit autour d'un axe horizontal ~~perpendiculaire~~ parallèle au méridien magnétique, la composante efficace sera la force verticale V : le flux utile sera SV, et la quantité d'électricité produite en 1 demi tour sera

$$Q' = \frac{2SV}{R}.$$

On a ainsi un procédé pour mesurer l'inclinaison : en effet :

$$\operatorname{tg} i = \frac{V}{H} = \frac{Q'}{Q}. \qquad (p. 181)$$

Inversement, quand on connaît l'intensité du magnétisme terrestre, on peut calculer a priori la quantité d'électricité fournie en 1 demi-tour (et par suite en un nombre connu de tours) par un circuit de surface et de résistance connus. On aura sa valeur en unités El. Mg.

Les courants induits par la terre ne sont pas les premiers qu'ait découverts Faraday : ce sont les courants induits par les aimants.

Considérons le cas particulier d'un aimant (infiniment petit) AB et d'un circuit O dont le plan est dans le prolongement de BA. Si on l'éloigne de l'aimant, le flux magnétique qui le traverse varie donc il y a production d'un courant : cherchons-en le sens.

B c A O

Le flux de force qui traverse le courant est (v. p. 254) :

$$\mathcal{F} = \frac{2MS}{r^3}$$

Si z augmente, $\mathcal{F}$ diminue : $\frac{d\mathcal{F}}{dt} < 0$,
donc $I > 0$: le courant est positif par rapport au flux, c.à.d. que le flux passe de la face boréale à la face australe. Le courant a donc le même sens que celui qui équivaut à l'aimant AB.

Si donc on remplace l'aimant AB par le courant fermé équivalent ($M = SI$), le flux de force étant le même, les mêmes phénomènes se produiront ; le courant induit dans le circuit O sera de même sens si O s'éloigne ; de sens contraire, s'il se rapproche.

Or deux courants de même sens s'attirent, de sens contraire se repoussent ; ainsi le courant induit gêne le mouvement. Cette propriété est générale, quelle que soit la cause de l'induction ; le sens du courant induit est donc déterminé par la loi de Lenz :

Tout courant induit résultant d'un déplacement ~~s'oppo~~ est de sens tel qu'il s'oppose à ce déplacement.

La loi de Lenz est une conséquence de la conservation de l'énergie dans le circuit : en effet, tout travail électromagnétique $d\mathcal{E} = I d\mathcal{F}$ produit dans le circuit une force électromotrice de signe contraire $-\frac{d\mathcal{F}}{dt}$.

On vérifie les lois précédentes avec un aimant ou un solénoïde qu'on approche ou qu'on éloigne d'une bobine

Nous venons de voir les courants induits : 1° par la terre ; 2° par les aimants ; 3° par les courants constants qui s'approchent ou s'éloignent. Il y a encore des courants induits par la variation d'intensité de courants immobiles ; en particulier, par l'apparition ou la cessation d'un courant dans un circuit fixe.

Soit un circuit A parcouru par un courant constant (d'intensité I), et un circuit B qu'on amène de l'infini à une position déterminée B voisine de A : le courant induit dans B est de sens contraire à celui de A, et l'on pourrait calculer la quantité d'électricité développée dans B, connaissant le flux de force émané de A qui traverse B.

Supposons maintenant que, les circuits A et B étant immobiles, et n'étant traversés par aucun courant, on lance dans A un courant d'intensité I (la même que ci-dessus) ; l'expérience montre que le courant induit dans B a le même sens et produit la même quantité d'électricité que dans l'expérience précédente.

La première partie de cette loi (sens du courant induit) a été découverte par Faraday. La seconde partie (quantité d'électricité) a été devinée par M. Neumann, et déduite du principe de la conservation de l'énergie dans le circuit B, en supposant qu'il y a un courant induit ; elle a été vérifiée

expérimentalement par M. Felicz.

Pour cela, on prend 3 circuits parallèles A, B, C ; A et C communiquent entre eux, mais le courant passe en sens inverse en eux ; B communique avec un galvanomètre. On lance un courant dans le double circuit A C : si B est au milieu des deux, en D, il n'y a pas de courant induit, les deux courants A et C neutralisant leur action. Mais si l'on place B en D', l'action de A domine, et le galvanomètre accuse un courant induit de sens contraire à celui de A. On varie l'expérience : pendant que le courant passe dans le circuit A C, on déplace brusquement le circuit B de D en D' ; il y a un courant induit de même sens que précédemment, qui produit la même déviation du galvanomètre.

Ainsi un courant qui commence induit un courant de même sens que s'il s'approchait ; un courant qui cesse induit un courant de même sens que s'il s'éloignait, c.à.d. un courant de même sens que lui-même.

Un courant induit par variation de intensité (de I_0 à I) peut être considéré comme la somme des courants induits par toutes les intensités successives, de I_0 à I. Par suite,

on peut calculer la force électromotrice induite par une variation d'intensité donnée.

Le flux de force à un moment donné est proportionnel à l'intensité du courant inducteur : $\mathcal{F} = MI$, M étant le coefficient d'induction mutuelle des 2 circuits. Pour une variation d'intensité dI, la variation du flux est :

$$d\mathcal{F} = M\,dI.$$

Si la force électromotrice induite est toujours donnée par la formule (hypothèse de Neumann) : $E = -\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, on aura :

$$E = -M\frac{dI}{dt}$$

Cette formule est l'expression du théorème de Neumann. Elle suppose que l'on connaît le coefficient M, ou encore la valeur du flux de force pour une intensité donnée I.

La quantité d'électricité développée par induction est :

$$Q = \int I\,dt = \frac{1}{R}\int E\,dt = -\frac{M}{R}\int_{I_0}^{I}\frac{dI}{dt}\,dt$$

c'est à dire :

$$Q = -\frac{M}{R}(I - I_0) = -\frac{1}{R}(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)$$

Pour un courant qui commence : $Q = -\frac{MI}{R}$.

Pour un courant qui finit : $Q = +\frac{MI}{R}$.

On voit qu'en général, un courant qui augmente induit un courant de sens contraire, un courant qui diminue induit un courant de même sens, car E est de signe contraire à dI.

22e leçon

Le coefficient d'induction mutuelle de 2 circuits dépend de leur position relative. On peut calculer sa valeur dans chaque cas particulier.

Soient 2 circuits infiniment petits O, O' ayant même axe. Supposons le circuit O parcouru par un courant d'intensité I : la force qu'il exerce sur le centre O' est :

$$\frac{2SI}{r^3} \qquad (r = OO')$$

et par suite le flux de force qui traverse le circuit O' (d'aire S') est :

$$\mathcal{F} = \frac{2SS'I}{r^3}$$

La force électromotrice induite dans le circuit O' est :

$$E = -\frac{d\mathcal{F}}{dt} = -\frac{2SS'}{r^3} \cdot \frac{dI}{dt}$$

Donc : $\quad M = \frac{2SS'}{r^3}$.

Autre exemple. Considérons une bobine infiniment longue, contenant n spires par centimètre de longueur. On sait que l'intensité du champ à son intérieur est :

$$4\pi n I \qquad \text{(v. p. 224.)}$$

Soit un circuit simple infiniment petit suspendu dans la bobine parallèlement aux spires : soit S sa surface. Le flux de force qui le traverse est : $\quad 4\pi n S I$.

Or : $\quad \mathcal{F} = MI$. $\quad$ Donc $\quad M = 4\pi n S$.

Si l'on remplace le circuit simple par une petite bobine de N spires ayant chacune la surface S, on trouve :

$$M = 4\pi n N S.$$

En général, le calcul du coefficient d'induction mutuelle en fonction des données n'offre que des difficultés mathématiques.

— Faraday a encore constaté qu'un courant exerce une induction sur lui-même. Considérons 2 spires A et B d'une bobine : le courant qui passe dans A ne peut ~~varier~~ augmenter sans induire un courant de sens contraire dans B. Quand les deux spires sont traversées par le même courant dans le même sens, elles induisent l'une dans l'autre une force électromotrice contraire au courant naissant, ~~et~~ et qui par suite s'oppose à son établissement. Quand le courant cesse, l'induction mutuelle a lieu en sens contraire : la force électromotrice induite a le même sens que le courant, et s'oppose à son évanouissement.

Il est difficile de mettre en évidence l'existence du courant induit, qui se superpose au courant primaire dans le même fil. Faraday admit que la loi de l'induction s'applique aussi aux courants instantanés (comme la loi d'Ohm dont elle est dérivée) Il a imaginé une double expérience qui manifeste le courant induit de fermeture, de sens contraire au courant primaire, et le courant induit de rupture, de même sens que le courant primaire (Voir Fernet, n° 606.)

Les forces électromotrices dites de <u>self-induction</u> dépendent

de la variation du flux de force du courant à travers lui-même (c.à.d. de chaque spire à travers toutes les autres)
Ce flux de force est proportionnel à l'intensité du courant, et à un facteur L qui dépend de la forme du circuit :

$$\mathcal{F} = L I$$

Le coefficient de self-induction L peut se calculer a priori comme M, mais plus difficilement.

Pour qu'il y ait self-induction, il n'est pas nécessaire que le circuit soit enroulé sur lui-même : tout courant qui varie exerce une induction sur lui-même. Cela se comprend, car un circuit, même simple, est toujours formé par un conducteur plus ou moins épais ; le courant est en quelque sorte un faisceau de filets de courant parallèles et juxtaposés, qui s'induisent les uns les autres, le flux de force de chacun passant à travers les autres.

Néanmoins, la self-induction d'un circuit simple est incomparablement plus petite que celle d'une bobine ; aussi est-elle négligeable par rapport à celle d'une bobine : dans les bobines de résistances, où l'on enroule en sens inverse 2 fils traversés en sens inverse par le même courant, on peut considérer la self-induction comme nulle (p. 236)

Dans l'induction par le mouvement, la force électromotrice induite s'explique, on l'a vu (p. 258) par le travail électro

magnétique effectué. Mais dans l'induction par variation d'intensité, et en particulier dans la self-induction, il n'y a pas de travail effectué : d'où vient la force électromotrice induite ? Quand un courant s'établit, il produit un champ magnétique, et par suite une énergie potentielle des corps situés dans ce champ : la création de cette énergie potentielle se traduit par la force électromotrice induite. Le travail de la pile se dépense à la fois en chaleur de Joule et en énergie potentielle magnétique. C'est pourquoi, pendant la phase d'établissement du courant (1/1000e de seconde) on a : $RI^2dt < EIdt$.

Inversement, quand le courant cesse, le champ magnétique disparaît, et rend son énergie potentielle sous forme de force électromotrice, avec production de chaleur. C'est pourquoi l'on a, dans la phase de rupture : $RI^2dt > EIdt$.

En résumé, le champ magnétique produit par un courant possède une énergie potentielle correspondant à l'intensité de ce courant. Ce sont les variations de cette énergie qui engendrent les phénomènes d'induction.

— Jusqu'ici nous avons considéré des circuits de forme invariable. Il est intéressant d'étudier des circuits qui se déforment.

Considérons par exemple le circuit

A B B'
D C C'

formé par 2 rails parallèles dans un plan horizontal, et une traverse qui roule sur eux. Le flux de force qui traverse le circuit est dû à la composante verticale V du magnétisme terrestre. Si la traverse passe de BC en B''C', soit S l'aire du rectangle BCC'B', le flux de force augmente de la quantité VS. Soit v la vitesse de translation de la traverse, a sa longueur. En 1 seconde, elle balaie une surface av; en dt, une surface avdt. Donc

$$d\mathcal{F} = Vavdt,$$

et la force électromotrice induite dans le circuit sera:

$$E = -\frac{d\mathcal{F}}{dt} = -Vav.$$

Pour se faire une idée de la grandeur de E, qu'on suppose la traverse BC formée par l'essieu d'un wagon roulant à la vitesse de 20 mètres par seconde: $v = 2000$;
qu'on fasse approximativement: $a = 100$, $V = 0{,}5$.
On trouve: $E = -100.000 = -10^5$ CGS.
Ainsi E est égal (en valeur absolue) à $\frac{1}{1000}$ de volt.
Dans ce cas, le courant induit est dû à un travail électromagnétique produit par le déplacement de la traverse BC:

$$d\mathcal{C} = Id\mathcal{F} = IVavdt$$

D'autre part, soit X la force qui s'exerce sur la traverse (en sens contraire de son mouvement, en vertu de la loi de Lenz) et dx son déplacement infiniment petit:

$$d\mathcal{E} = X\,dx = X\,v\,dt$$

Donc: $X = I V a$.

Si par exemple le courant lancé dans le circuit est d'un ampère ($I = 10^{-1}$ CGS), on trouve: $X = 5$ [dynes]

— Plus généralement, cherchons la force qui s'exerce sur un élément de courant d'intensité I, de longueur ds, mobile dans un champ magnétique et faisant l'angle θ avec la direction de la force.

Imaginons que cet élément fait partie d'un circuit fermé dans un plan normal à la direction de la force, et tel que le flux de force ~~soit~~ positif qui le traverse (passe de la droite à la gauche du courant).

Pour trouver la direction de la force qui s'exerce sur ds, il suffit de chercher pour quel déplacement virtuel de ds ~~la variation~~ aura lieu le plus grand accroissement du flux de force.

En effet,
$$X\,dx = d\mathcal{E} = I\,d\mathcal{F},$$
et le travail est maximum quand le déplacement dx a lieu dans le sens de la force (la composante X est alors maxima et égale à la force elle-même). Or on voit que ce maximum correspond à un déplacement de ds perpendiculaire à sa position et à la force magnétique F; en d'autres termes la force électromagnétique X est perpendiculaire au plan de l'élément ds et de la force magnétique.

De plus (pour que dF soit un accroissement, c.à.d. (que le travail soit) positif) il faut que le déplacement de ds ait lieu en dehors du circuit : donc, quand l'observateur d'Ampère couché le long de ds ~~et~~ reçoit le flux magnétique en face, la force X est dirigée vers sa droite. Elle a pour expression :

$$X = FI ds . \sin\theta$$

On voit que cette expression ne diffère de la précédente (VIa) que par le facteur $\sin\theta$, qui était alors égal à 1.

Nous allons appliquer cette formule à quelques problèmes.

<u>Galvanomètre à mercure</u> de M. Lippmann.

L'élément de courant ~~est~~ mobile est liquide : il est formé par le mercure qui remplit une petite boîte de hauteur l, d'épaisseur e, comprise entre les 2 pôles d'un fort aimant, et que le courant traverse de bas en haut, par exemple. Les lignes de force traversent la boîte de gauche à droite ; la force électromagnétique X pousse alors le mercure en arrière du tableau. Pour lui faire équilibre, on emploie une force hydrostatique : la boîte est entre les 2 branches d'un tube en U, et le mercure monte dans (d'une hauteur h) la branche d'arrière, étroite ; la branche d'avant est assez large pour que le niveau n'y varie pas sensiblement.

La force électromagnétique est : FIl. $(l = ds)$

D'autre part, la force hydrostatique est : ple,

c'est la pression sur la face latérale de la boîte, laquelle s'oppose au déplacement horizontal du mercure. Calculons la pression p (par unité de surface) ; elle est égale à :

$p = h\delta g$ δ densité du mercure.

L'équation d'équilibre est : $ple = FIl$,

ou $pe = FI$ $h\delta ge = FI$

d'où l'on tire : $I = \frac{h\delta ge}{F} = Ah$,

en posant : $\frac{\delta ge}{F} = A$ (constante instrumentale)

Ainsi l'intensité du courant est proportionnelle à la dénivellation du mercure. Le sens de cette dénivellation indique le sens du courant, car si l'on renverse celui-ci, le mercure baisse dans la branche étroite au-dessous du 0. On peut graduer cette branche en ampères. Cet instrument a l'avantage d'être apériodique : comme il arrive lentement et progressivement à sa position d'équilibre, il n'oscille pas.

Comme toujours, au travail électromagnétique produit dans cette expérience correspond un phénomène d'induction. Si, aucun courant ne passant dans la boîte, on ~~produit~~ obtient mécaniquement la dénivellation du mercure (dans le même sens), l'écoulement du mercure produit un courant induit de même sens que le courant de la 1re expérience : car le mercure se déplace alors en sens inverse ; or le courant induit doit, en vertu de la loi de

Lenz, s'opposer au déplacement.

Roue de Barlow. C'est un disque de cuivre rouge pouvant tourner autour d'un axe horizontal : le courant entre par l'axe et sort par le bord inférieur qui plonge dans une rigole pleine de mercure. On place la partie inférieure du disque entre les pôles d'un fort aimant. Quand le courant passe, la roue se met à tourner vers la droite de l'observateur d'Ampère. Si l'on renverse le courant, elle tourne en sens contraire.

Réciproquement, si, aucun courant ne passant, on fait tourner la roue, on produit un courant induit, qui change de sens avec la rotation.

On a ainsi des exemples de la réversibilité des moteurs électriques (le galvanomètre à mercure peut être considéré comme une machine élévatoire ou comme un moteur hydraulique) qui deviennent des machines magnéto-électriques. Seulement les appareils précédents ne produisent que des forces électromotrices très faibles ou un travail très petit.

— Considérons maintenant non plus un élément de courant, mais un courant fermé qui se déplace tout d'une pièce (ou se déformant) de A en B'. On peut le décomposer en éléments de courant qu'on peut concevoir comme se mouvant séparément. Ce

n'est pas là une fiction mathématique, comme celle qui consiste à décomposer un circuit par un quadrillé (p. 203) pour l'assimiler à un feuillet magnétique, mais une hypothèse physique réalisable par expérience : car on peut rendre indépendante telle portion du circuit que l'on veut. La 1re conception est de lord Kelvin : elle a l'avantage de relier intimement et directement les phénomènes électriques aux phénomènes magnétiques (et de fournir des formules plus simples). La 2e est celle de Ampère : elle est plus conforme à l'ordre historique et aussi à la réalité physique ; elle est plus satisfaisante pour l'esprit.

Le courant étant donc décomposé en ses éléments réels (et non plus en petits courants fermés fictifs), le travail total des forces électromagnétiques sera la somme des travaux élémentaires effectués sur les éléments du ~~circuit~~ courant, et l'on aura encore les formules :

$$d\mathcal{E} = I\, d\mathcal{F} \qquad E = -\frac{d\mathcal{F}}{dt},$$

applicables cette fois au circuit tout entier pour un déplacement infiniment petit (avec ou sans déformation).

La force qui s'exerce sur un élément $\underline{ds}$ du courant dans un champ magnétique de intensité F est, comme on sait :

$$X = F I\, ds . \sin\theta$$

car pour le déplacement dx qui correspond au travail maximum on a :

$$d\mathcal{F} = F\, ds . \sin\theta . dx$$

Si le champ magnétique est produit par une masse magnétique $+m$, la force de cette masse à la distance r, est $\frac{m}{r^2}$; donc la force qu'elle exerce sur l'élément ds situé à cette distance sera :

$$X = \frac{m I ds}{r^2} \sin\theta$$

Cette formule élémentaire a été trouvée par Ampère, et probablement suggérée par lui à Biot et Savart. Ceux-ci ont alors fait l'expérience suivante :

Soit une petite aiguille aimantée de déclinaison ; dans le plan perpendiculaire au méridien magnétique et passant par le milieu de l'aiguille, on place un fil vertical, de longueur indéfinie, parcouru par un courant de sens tel que son action s'ajoute à celle du magnétisme terrestre. Si donc l'on fait osciller l'aiguille, on pourra mesurer la force qui la sollicite : l'excès de cette force sur la composante horizontale H du champ terrestre est la force X exercée par le courant. Théoriquement, on a : $dX = \frac{m I ds}{r^2} \sin\theta$

En supposant le fil de longueur infinie, on trouve :

$$X = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{m I ds}{r^2} . \sin\theta = 2 m I \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{ds . \sin\theta}{r^2}$$

Or, soit a la distance du centre O de l'aiguille au fil : $r = \frac{a}{\sin\theta}$

$ds = d\frac{a}{tg\,\theta} = \frac{-a\,d\theta}{\sin^2\theta}$ $\quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{ds . \sin\theta}{r^2} = \frac{1}{a}$. Donc

$$X = \frac{2 m I}{a}.$$

Telle est la loi de Biot et Savart, qu'ils ont vérifiée par l'expérience: la force exercée par le courant rectiligne indéfini sur l'aimant est en raison inverse de la distance.

23e leçon

Cette loi permet de calculer l'action d'un courant rectiligne indéfini sur une aiguille aimantée (expérience d'Œrstedt).
En général, cette action se compose d'un couple et d'une force, car les actions sur les 2 pôles ne sont pas en général, égales et contraires.

Comme la formule est indépendante de l'azimut où le pôle se trouve placé par rapport au courant, la force est la même dans tous les azimuts: elle est toujours perpendiculaire au plan du pôle et du courant. Donc si l'on ~~fait~~ laisse tourner le pôle autour du courant comme axe, le travail de la force sera le produit de la force par la longueur de la circonférence parcourue:

$$\mathcal{C} = X \cdot 2\pi a = 4\pi m I.$$

Ainsi le travail effectué en 1 tour est indépendant de la distance du pôle au courant. Le mouvement pouvant continuer indéfiniment, on a ainsi un moteur électrique.

Inversement, si l'on fait tourner le pôle austral P isolé, autour du fil rectiligne (formant un circuit fermé à grande distance), on y produit un courant induit dont on peut calculer l'intensité. Soit ω la vitesse angulaire; le chemin parcouru

dans le temps dt est : ωdt. Le travail effectué en un tour complet étant $4\pi m I$, le travail effectué en un temps dt est : $d\mathcal{C} = 4\pi m I \times \frac{\omega dt}{2\pi} = 2m\omega I dt$

Or on a toujours : $d\mathcal{C} = I d\mathcal{F}$

On en conclut : $d\mathcal{F} = 2m\omega dt$

et par suite : $E = -\frac{d\mathcal{F}}{dt} = -2m\omega$

Telle est la force électromotrice induite dans le fil par le pôle de masse $+m$ tournant avec la vitesse angulaire ω.

Si ω est constante, le courant induit sera constant.

On peut calculer autrement et à priori le travail correspondant à un tour entier du pôle autour du courant. En effet, il est égal (le mouvement étant relatif) à celui qu'effectuerait le courant en tournant autour du pôle. Quel est le flux de force coupé par le courant pendant un tour ? Le courant engendrant un cylindre droit indéfini, intercepte (successivement) la totalité du flux de force émané du pôle $+m$, lequel est : $4\pi m$ (même démonstration que pour le flux de force électrique, fondée sur la loi de Coulomb.) (v. p. 44.)

Or le travail est toujours : $\mathcal{C} = I\mathcal{F}$

Donc le travail en un tour est : $\mathcal{C} = 4\pi m I$.

La même méthode permet d'évaluer encore le travail électromagnétique dans d'autres cas.

Soit par exemple un arc de courant PQR mobile autour de

tracé PR sur lequel se trouve un pôle austral A, de masse magnétique m. On voit que toutes les forces concourent à faire tourner le courant dans le même sens. Si le courant fait un tour entier, il engendre une surface fermée qui intercepte le flux de force tout entier. Donc le travail total en un tour est encore:

$$\mathcal{C} = 4\pi m I.$$

On peut ainsi évaluer le travail sans connaître la force.

Inversement, si l'on fait tourner le fil PQR (faisant partie d'un circuit fermé) autour du pôle A avec la vitesse angulaire ω, la force électromotrice induite sera encore:

$$E = -2m\omega.$$

Ces propositions paraissent inapplicables à la réalité, car on ne peut jamais obtenir pratiquement un pôle isolé.

Mais prenons un aimant dont le pôle austral A soit sur PR, et le pôle boréal B sur le prolongement de PR, en dehors du circuit (ou même sur le circuit). Le travail correspondant au pôle A pour un tour est, comme on sait, $4\pi m I$. Le travail correspondant au pôle B est nul, car le flux de force qui émane de B traverse la surface fermée engendrée

par PQR en tournant est nul, B étant extérieur (v. p. 45) tout se passe donc comme si le pôle A était isolé.

Il est aisé de voir que c'est la seule disposition qui donne un effet électromagnétique avec un aimant complet (à 2 pôles); car si les pôles étaient tous deux à l'intérieur ou à l'extérieur du circuit, le flux de force total qui traverse la surface de révolution serait nul.

Il semble, en vertu de l'assimilation d'un courant fermé à un feuillet, qu'on doive pouvoir produire la rotation continue d'un feuillet avec un aimant: on réaliserait ainsi le mouvement perpétuel, car on obtiendrait du travail indéfiniment sans dépenser d'énergie. Mais l'analogie du courant et du feuillet est ici fausse. En effet, étant donné un feuillet, et une masse magnétique positive A sur ~~l'une de ses faces~~ sa face australe, ~~la répulsion~~ les forces magnétiques peuvent l'amener sur la face boréale en faisant le tour du feuillet. Mais pour revenir à sa position initiale, il lui faudrait percer le feuillet; lors même qu'un trou y serait préparé, il faudrait dépenser, pour lui faire traverser le feuillet, un travail égal à celui qu'elle aurait produit en passant d'une face sur l'autre. En effet, le potentiel V produit par un feuillet sur un point extérieur est en général $P\Omega$ (v. p. 198); il est $2\pi P$ sur la face australe, $-2\pi P$ sur la face boréale;

sa variation d'une face à l'autre est $4\pi I$: c'est le travail qu'il faut effectuer pour ramener le pôle A de la face boréale sur la face australe. Le système est donc soumis au principe de la conservation de l'énergie.

La loi précédente explique la rotation d'un pôle d'aimant autour d'un courant vertical (expérience de Faraday.) L'autre pôle, plongé dans le mercure qui conduit le courant, est annulé.

Dans le cas où le courant vertical passe par l'aimant lui-même (variante de l'expérience), la rotation de l'aimant s'explique par l'action du courant sur les pôles latéraux.

Tous les ~~appa~~ appareils précédents sont des moteurs électriques, qui ne sont pas pratiques, car ils ne produisent qu'un faible travail ; mais ils sont intéressants au point de vue théorique, car ils produisent des courants constants (ce qui n'est pas le cas de la plupart des machines magnéto-électriques) et fournissent des exemples parfaits de réversibilité des moteurs électriques.

Action des courants sur les courants.

Si l'on admet, avec Ampère, qu'un aimant est un solénoïde électrique, on peut conclure des actions des aimants sur les courants (et vice versa) aux actions des courants sur les courants. On est ainsi amené à chercher d'abord l'action d'un élément de courant sur un élément de courant, pour en déduire

ensuite l'action d'un courant fini sur un autre.

Mais ce problème est artificiel, et insoluble par expérience: car si l'on peut rendre mobile une portion de courant et observer l'action d'un aimant sur elle, on ne peut isoler deux éléments de courant pour observer leur action mutuelle. On ne peut que constater l'action d'un circuit fermé sur un élément de courant mobile; et comme cette action peut se déduire d'une infinité de lois de l'action mutuelle de 2 éléments, entre lesquelles l'expérience ne peut décider, le problème reste indéterminé. En effet, supposons connue la loi des actions de 2 éléments, on peut y introduire un terme qui disparaisse quand on intègre suivant un circuit fermé; de telle sorte que le résultat vérifiable soit le même. Ces diverses lois sont donc indiscernables pour l'expérience.

Toutefois, Ampère a rendu le problème déterminé en lui imposant a priori certaines restrictions. D'abord, il a admis que l'action totale d'un courant est la somme des actions de tous ses éléments. Mais de plus, il a supposé: 1° que l'action était égale à la réaction entre 2 éléments de courant; 2° que l'action mutuelle des 2 éléments est dirigée suivant la droite qui les joint (ce qui n'est pas évident a priori, car on a vu que l'action d'un courant sur un aimant est perpendiculaire à la droite qui les joint.)

Enfin, il a présumé que l'action était fonction de la distance seulement, et même qu'elle était en raison inverse d'une puissance finie de la distance (comme les forces électrostatiques, magnétiques et électromagnétiques)

Par des expériences bien connues, il obtient les lois élémentaires 1° des courants parallèles; 2° des courants angulaires; 3° des courants sinueux; 4° la loi de la répulsion de 2 portions consécutives d'un même courant (fondée sur l'expérience des 2 rigoles parallèles, qui ne prouve rien: car on ne sait pas si l'action s'exerce sur les tiges parallèles ou sur le pont.)

De ces lois expérimentales Ampère déduisit les 2 lois suivantes concernant l'action de 2 éléments de courant:

1° Deux éléments parallèles s'attirent s'ils sont de même sens, se repoussent s'ils sont de sens contraire.

Ampère admit que leur action mutuelle X était proportionnelle à leurs longueurs ds, ds', et aux intensités des courants I, I', et il posa la formule:

$$X = A\,\frac{II'ds\,ds'}{r^n}$$

2° Deux éléments consécutifs d'un même courant se repoussent. Ampère admit que la force était en raison inverse de la même puissance (n^e) de la distance, et que le coefficient A seul pouvait changer; de où la formule:

$$X' = -B\,\frac{II'ds\,ds'}{r^n}$$

3° Deux éléments dont l'un est perpendiculaire au milieu de l'autre n'ont aucune action l'un sur l'autre.

En effet, AB attire la moitié CM et repousse la moitié MD ; et comme CD est infiniment petit, les 2 actions contraires, dirigées suivant AM, se neutralisent.

A
B
C M D

4° Deux éléments perpendiculaires entre eux et à la droite qui les joint n'ont aucune action l'un sur l'autre. Ampère admit cette loi pour des raisons de symétrie analogues aux considérations qui justifient la précédente.

Telles sont les lois infinitésimales admises par Ampère dans ces 4 positions particulières. Pour en déduire l'action de 2 éléments dans une position relative quelconque, il invoqua la loi des courants sinueux.

y B θ O z A — y C ε θ' O' z x D

Pour cela il décomposait les deux éléments de courant en les projetant sur 3 axes rectangulaires, et appliquant cette loi à la ligne brisée formée par ces projections, il en concluait que l'action mutuelle des 2 éléments était la somme des actions de leurs projections. Prenons pour axe des $\underline{x}$ la droite qui joint les centres OO' des 2 éléments ; AB = ds, CD = ds', et pour plan des xy le plan où se trouve AB ; ~~les projections~~ soient θ, θ'

les angles)
(des 2 éléments avec l'axe des x (~~pris~~ chaque élément étant pris positivement dans le sens du courant), et soit ε l'angle du plan $OO'CD$ avec l'axe des z, les projections sont:

$$dx = ds\cos\theta \qquad dx' = ds'\cos\theta'$$
$$dy = ds\sin\theta \qquad dy' = ds'\sin\theta'\cos\varepsilon$$
$$dz = 0 \qquad dz' = ds'\sin\theta'\sin\varepsilon$$

Si l'on accouple chaque élément de l'un à chaque élément de l'autre, on obtient des couples qui présentent une des 4 positions définies ci-dessus. Si l'on élimine les couples qui sont dans la 3e ou la 4e position (dont l'action est nulle), il ne reste plus que les couples $dx\,dx'$ et $dy\,dy'$ dont on a à tenir compte. En leur appliquant les 2 lois élémentaires, on trouve pour l'action totale (dirigée suivant $OO' = r$) la formule suivante:

$$X = A\,\frac{II'\,ds\,ds'}{r^n}\left[\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon - \frac{B}{A}\cos\theta\cos\theta'\right]$$

Ampère a fait des expériences pour déterminer les constantes inconnues A, B et n: c'étaient des expériences d'équilibre. De la formule précédente il déduisait 2 certains cas d'équilibre dont les équations fournissaient les valeurs des constantes qui y figuraient. Ampère trouva ainsi:
$n = 2$; $\frac{B}{A} = \frac{1}{2}$. Quant à A, il ne s'en occupait pas, car il ne faisait que des mesures relatives. Par des expériences de mesure absolue, on a trouvé: $A = -2$ (le signe —

indique une attraction, de sorte que B, auquel nous avons attribué le signe −, doit être positif, càd. correspond à une répulsion.) La formule de Ampère est en définitive:

$$d^2F = -2\frac{II'dsds'}{r^2}\left[\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon - \frac{1}{2}\cos\theta\cos\theta'\right]$$

(on écrit d^2F pour indiquer qu'il faut une double intégration, en ds et en ds', pour trouver la force finie qui s'exerce entre 2 courants finis.)

Cette formule peut par des transformations analytiques être mise sous les formes suivantes, plus commodes pour certains cas particuliers:

$$d^2F = -2\frac{II'dsds'}{r^2}\left[\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\theta.\cos\theta'\right]$$

ω étant l'angle que les 2 éléments ds, ds' font entre eux.

$$d^2F = +2\frac{II'dsds'}{r^2}\left[r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}.\frac{\partial r}{\partial s'}\right]$$

formule d'où les angles sont exclus.

$$d^2F = +4\frac{II'dsds'}{\sqrt{r}}\times\frac{\partial^2(\sqrt{r})}{\partial s.\partial s'}$$

formule la plus simple, où ne figure qu'une dérivée seconde.

Cette dernière formule est intéressante, parce qu'elle permet de trouver une expression élégante du travail électromagnétique ~~exercé~~ effectué par un courant fermé sur un autre courant également fermé. Le travail élémentaire, pour un déplacement infiniment petit, est:

$$d\mathcal{E} = II'd\iint\frac{\cos\omega\, dsds'}{r},$$

l'intégrale double étant étendue à la totalité des 2 circuits fermés.

On peut tirer de cette formule la loi de l'induction des courants par les courants. On a les formules générales :

$$E_1 = -\frac{d\mathcal{F}}{dt} \qquad d\mathcal{E} = I\,d\mathcal{F}$$

d'où l'on conclut :

$$E_1 = -\frac{1}{I}\cdot\frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

formule qui exprime la force électromotrice induite (dans le 1er circuit) en fonction du travail. Substituons-y l'expression du travail :

$$E_1 = -I'\frac{d}{dt}\iint\frac{\cos\omega\, ds\, ds'}{r}$$

Or on sait (p. 264) que, M étant le coefficient d'induction réciproque, le flux de force émané du 2e courant qui traverse le 1er est :

$$\mathcal{F} = MI',$$

et si I' est constante :

$$d\mathcal{F} = I'\,dM$$

(le coefficient d'induction varie par suite du déplacement)

On a dans ce cas :

$$E_1 = -I'\frac{dM}{dt}$$

Rapprochons cette formule de la précédente ; on en conclut :

$$M = \iint\frac{\cos\omega\, ds\, ds'}{r}$$

Cette formule permet de calculer pratiquement le coefficient d'induction réciproque de 2 circuits (dans une position donnée fixe). Elle est d'ailleurs indépendante des lois de Ampère.

Dans le cas des courants induits par variation d'intensité (les 2 circuits restant fixes), on a au contraire (v. p. 264) :

$$E_1 = -M\frac{dI'}{dt}$$

et par suite, en vertu du résultat précédent :

$$E_1 = -\frac{dI'}{dt}\iint\frac{\cos\omega\, ds\, ds'}{r}.$$

La formule de M permet aussi de calculer le coefficient de self-induction (mais plus difficilement) En effet, si l'on considère l'action de chaque élément du courant sur les autres, on a encore l'intégrale :

$$\iint \frac{\cos \omega \, ds \, ds'}{r}$$

seulement ds et ds' appartiennent cette fois au même circuit. C'est la seule formule par laquelle on puisse calculer le coefficient de self-induction.

24e leçon

Problème de l'établissement d'un courant.

Dans un circuit simple, de résistance R, on intercale à un moment donné une force électromotrice E. Soit L_1 le coefficient de self-induction du circuit. Pour connaître l'intensité I (à chaque instant, on applique la loi d'Ohm à la force électromotrice totale du courant, qui se compose de la force E et de la force électromotrice de self-induction $-L_1 \frac{dI}{dt}$:

$$E - L_1 \frac{dI}{dt} = RI \qquad L_1 \frac{dI}{dt} + RI = E$$

équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants, avec 2e membre, dont la solution est :

$$I = \frac{E}{R} + A e^{-\frac{R}{L_1} t}$$

La constante d'intégration A est déterminée par les conditions initiales : or à l'instant $t = 0$, on avait : $I = 0$; donc

$$\frac{E}{R} + A = 0 \qquad A = -\frac{E}{R}.$$

L'équation du courant est donc finalement :

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Pour $t = \infty$, on trouve : $I_\infty = \frac{E}{R}$.

Ainsi I varie de 0 à $\frac{E}{R}$, valeur limite qui est celle que donne la loi d'Ohm sans self induction. La courbe qui représente la variation de I en fonction du temps a pour asymptote la droite : $y = \frac{E}{R}$.

La dérivée de I est :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{E}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{et pour } t = 0 : \quad \frac{dI}{dt} = \frac{E}{L}.$$

c'est le coefficient angulaire de la tangente à l'origine.

Comme l'exponentielle décroît très rapidement, l'intensité du courant s'approche très vite de sa valeur limite $\frac{E}{R}$, qu'on peut considérer (au bout de très peu de temps pratiquement) comme sa valeur constante.

Si le courant avait tout de suite sa valeur limite $I_\infty = \frac{E}{R}$, la quantité d'électricité transportée dans le temps t serait $I_\infty t$, et serait représentée par l'aire du rectangle OAB. Mais, en vertu de la self-induction, la quantité d'électricité n'est que :

$$Q = \int^t I\,dt$$

qui représente l'aire de la courbe, soit OAC. Si l'on attribue le retard que subit l'établissement du courant à la production d'un courant induit de sens contraire dont l'intensité serait

le déficit de l'intensité du courant primaire : $\frac{E}{R} - I$, on peut dire que cet extra-courant transporte, en sens inverse, une quantité d'électricité égale à :

$$Q' = \frac{E}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{R}{L}t}\,dt = \frac{EL}{R^2}$$

qui représente l'aire comprise entre la courbe et son asymptote.

On peut de même évaluer l'énergie employée à établir le courant. L'énergie dépensée par la pile (de force E) est :

$$EIdt = RI^2dt + L\,I\frac{dI}{dt}dt$$

L'énergie employée par le courant (sous forme de chaleur) étant RI^2dt, l'énergie perdue par suite de la self induction est :

$$W = \int_0^\infty L\,I\frac{dI}{dt}dt = L\int_0^{\frac{E}{R}} IdI = \frac{L}{2}\cdot\frac{E^2}{R^2}.$$

$$W = \frac{L}{2}I_\infty^2.$$

Telle est l'énergie employée à l'établissement du courant (ou à la formation du champ magnétique correspondant.)

On voit que le courant s'établit d'autant plus lentement que L est plus grand et que R est plus petit.

Problème inverse : de la rupture d'un courant.

Le phénomène de la rupture d'un courant est en réalité très compliqué, parce qu'il se produit une étincelle : quand on l'examine au spectroscope, on y trouve à la fois les raies du métal des électrodes et celles du gaz où passe l'étincelle. Ainsi l'étincelle rend le gaz lumineux, sinon incandescent. C'est là un phénomène trop complexe pour être mis en équation

Supposons, pour simplifier, qu'à un moment donné on supprime la pile et que, sans interrompre le circuit, on la remplace par un conducteur de résistance égale, de sorte qu'il n'y ait pas d'étincelle : par exemple, si le courant était produit par une machine de Holtz, on arrêterait brusquement le plateau. C'est là une hypothèse irréalisable, mais du moins concevable. Dans ce cas la force électromotrice E de la pile étant supprimée, il ne reste que la force électromotrice d'induction ; et l'on a l'équation :

$$RI = -L\frac{dI}{dt} \qquad L\frac{dI}{dt} + RI = 0$$

équation différentielle linéaire sans 2e membre, dont la solution est :

$$I = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

La constante A est déterminée par les conditions initiales. En supposant que le courant passe depuis un temps infini, c.à.d. a atteint sa valeur limite, on a, au moment de la rupture :

$$I = \frac{E}{R} \qquad \text{pour } t = 0.$$

On en conclut :

$$A = \frac{E}{R}.$$

L'équation définitive est donc :

$$I = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

L'intensité du courant part de la valeur $\frac{E}{R}$ et décroît rapidement en tendant vers 0. La courbe qui la représente est la même que celle de l'établissement du courant, mais renversée. La quantité d'électricité qui passe après la

rupture (dans le sens direct) est représentée par l'aire de la courbe (qui a pour asymptote l'axe des x). Elle est donc égale (au signe près) à la quantité d'électricité $Q' = \frac{E L_1}{R_1^2}$ qui manque au début, et qui était censée transportée en sens inverse par l'extra-courant. Dans le cas présent, elle est réellement transportée par l'extra courant de rupture, qui a le même sens que le courant primaire.

Quand l'étincelle se produit, elle prolonge le circuit et augmente beaucoup sa résistance. On ne sait pas comment varie la résistance de l'étincelle avec le temps. Si on le savait, on n'aura qu'à faire R, non plus constante, mais fonction du temps dans l'équation différentielle:

$$L_1 \frac{dI}{dt} + R(t) I = 0$$

La quantité d'électricité transportée par l'extra-courant est toujours la même: seulement, si la résistance est grande, l'extra-courant sera très court, et par suite très-intense. Mais cette formule ne représente pas exactement le phénomène, car il se produit sur chaque électrode une force électromotrice.

<u>Problème</u> de deux circuits exerçant une induction l'un sur l'autre (On les suppose enroulés en bobines sur une partie de leur longueur, et juxtaposés, pour augmenter l'induction.) Soient R, R' leurs résistances, L_1, L_1' leurs coefficients de self induction, M leur coefficient d'induction réciproque

Soient E, E' les forces électromotrices intercalées dans les 2 circuits. Appliquons-leur la loi d'Ohm en tenant compte des forces électromotrices de self induction et d'induction mutuelle:

$$RI = E - L\frac{dI}{dt} - M\frac{dI'}{dt}$$

En ordonnant cette équation, et en écrivant l'équation semblable pour le 2e circuit, on trouve:

$$\begin{cases} L\dfrac{dI}{dt} + M\dfrac{dI'}{dt} + RI = E & (1) \\ L'\dfrac{dI'}{dt} + M\dfrac{dI}{dt} + R'I' = E' & (2) \end{cases}$$

~~On élimine par ex. Pour résoudre~~ La solution de ce système dépend d'une équation différentielle linéaire du 2e ordre. En effet, on différentie les 2 équations précédentes entre les 4 équations ainsi obtenues on élimine $I', \frac{dI'}{dt}, \frac{d^2I'}{dt}$; l'équation résultante est la suivante:

$$(LL'-M^2)\frac{d^2I}{dt^2} + (L'R + LR')\frac{dI}{dt} + RR'\left(I - \frac{E}{R}\right) = 0$$

c'est une équation de la forme:

$$p\frac{d^2I}{dt^2} + q\frac{dI}{dt} + rI = s.$$

dont l'équation caractéristique est:

$$px^2 + qx + r = 0.$$

Soient α et β les racines de celle-ci; l'intégrale est:

$$I - \frac{E}{R} = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales, c.à.d. par les valeurs de I, I' à l'origine des temps.

On trouverait pour I' une intégrale de la même forme:
$$I' - \frac{E_1'}{R'} = A'e^{\alpha t} + B'e^{\beta t}$$
α et β sont les mêmes car l'équation caractéristique est la même (symétrique en L_1, L_1'; R, R'); seules les constantes A', B' diffèrent. — En se donnant les valeurs initiales des intensités I, I', on a 2 relations entre les coefficients; en portant ces valeurs dans les équations 1 et 2, on obtient 2 autres relations en tout 4 équations qui déterminent les 4 constantes.

On remarquera que l'équation caractéristique:
$$(L_1L_1' - M^2)x^2 + (L_1'R + L_1R')x + RR' = 0$$
a ses racines toujours réelles, car la quantité (B^2-4AC):
$$(L_1'R + L_1R')^2 - 4RR'(L_1L_1' - M^2) = (L_1'R - L_1R')^2 + 4RR'M^2$$
est ~~toujours~~ essentiellement positive. Donc les intensités I, I' sont exprimées par des exponentielles réelles.

De plus, $(L_1L_1' - M^2)$ est toujours positif (en vertu d'une relation physique entre les 3 coefficients d'induction.) Par suite, les racines α et β sont toujours négatives. Donc, quand le temps croît indéfiniment, les exponentielles tendent vers 0: I a pour limite $\frac{E_1}{R}$, I' a pr lim. $\frac{E_1'}{R'}$.

Pour obtenir une solution déterminée, particularisons le problème: cherchons le courant induit par la fermeture du 1er circuit dans le 2e circuit, de force électromotrice nulle $(E_1'=0)$.

On a simplement : $I' = A'e^{\alpha t} + B'e^{\beta t}$

On doit faire : $I = 0$, $I' = 0$, pour $t = 0$.

On détermine ainsi les constantes A, B, A', B'.

Si l'on représente graphiquement les deux intégrales, on voit que I part de 0 et tend vers $\frac{E}{R}$; I', négative, part de 0 et tend vers 0.

Cherchons maintenant le courant induit de rupture. En supposant que I a atteint sa valeur limite $\frac{E}{R}$, on ouvre le circuit (sans produire d'étincelle). On a les mêmes équations, mais avec d'autres conditions initiales :

$$I = \frac{E}{R}, \qquad I' = 0 \qquad \text{pour } t = 0.$$

Cette fois, le courant étant direct, I' est positive et la même courbe se trouve au-dessus de l'axe.

— Si au lieu de circuits simples comme dans les problèmes précédents, on a affaire à des circuits ramifiés, on leur applique les lois de Kirchhoff : pour tous les points de ramification on pose l'équation : $\Sigma I = 0$;

pour tous les circuits fermés simples on pose l'équation :

$$\Sigma (IR - E) = 0,$$

en faisant figurer dans E les forces électromotrices d'induction.

Exemple : Expérience de Faraday sur les extra-courants (p. 266.)

G

A B

P

Soit E la force électromotrice de la pile P ; Soient $I, R, \mathcal{L}$ l'intensité, la résistance et le coefficient de self-induction de la bobine AB ; Soient i, r, l les quantités correspondantes pour la branche AGB (galvanomètre G), et J, ρ, λ les quantités correspondantes pour la branche APB. On a d'abord pour le sommet A l'équation :

$$J = I + i$$

Le sommet B donnerait la même. On a d'autre part pour le circuit fermé ABP l'équation :

$$J\rho + IR - E + \lambda \frac{dJ}{dt} + \mathcal{L}\frac{dI}{dt} = 0$$

(On néglige les inductions mutuelles parce qu'on peut éloigner autant qu'on veut les diverses branches du courant.) Pour le circuit fermé BAG on a l'équation :

$$ir - IR + l\frac{di}{dt} - \mathcal{L}\frac{dI}{dt} = 0$$

La solution de ce système de 2 équations linéaires du 1er ordre dépend de une équation linéaire du 2e ordre. Les intensités se composent de leurs valeurs-limites et de 2 termes en exponentielles. Les valeurs-limites sont celles qu'on trouve en négligeant les forces électromotrices d'induction, càd. en résolvant les équations : $J = I + i$.

$$J\rho + IR - E = 0.$$

$$ir - IR = 0.$$

On trouve, en éliminant J et I :

$$(I+i)\rho + IR = E \qquad I = i\frac{r}{R}.$$

$$i\left(1+\frac{r}{R}\right)\rho + ir = E \qquad i = \frac{E}{r+\left(1+\frac{r}{R}\right)\rho}$$

d'où :

$$i_\infty = \frac{RE}{Rr+\rho(R+r)}$$

$$I_\infty = \frac{rE}{Rr+\rho(R+r)}$$

et

$$J_\infty = \frac{(R+r)E}{Rr+\rho(R+r)}$$

Les solutions générales sont donc les suivantes :

$$i = \frac{RE}{Rr+\rho(R+r)} + Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$$

$$I = \frac{rE}{Rr+\rho(R+r)} + A'e^{\alpha t} + B'e^{\beta t}$$

Les constantes A, B, A', B' sont déterminées par les conditions initiales : $I_0 = 0$, $i_0 = 0$.

Quand les coefficients l et λ sont beaucoup plus petits que L, le courant induit de fermeture est représenté par la courbe ci-contre : i dépasse sa valeur limite.

Le courant induit de rupture est représenté par la courbe ci-contre :

i tombe rapidement au-dessous de 0 pour tendre ensuite vers 0 par des valeurs négatives.

C'est dans ces conditions particulières que l'on voit l'aiguille du galvanomètre dépasser, dans un cas et dans l'autre, l'obstacle posé à côté d'elle. Ainsi les expériences de Faraday ont un caractère contingent, elles dépendent de la grandeur relative des coefficients : si le coefficient l du galvanomètre était égal ou supérieur au coefficient L de la bobine (ce qui est possible), elles ne réussiraient pas.

On emploie fréquemment les circuits dérivés pour étudier les courants variables, notamment pour comparer et évaluer les coefficients de self-induction de 2 courants, suivant la méthode inventée par Maxwell.

On emploie le pont de Wheatstone : les deux branches de droite BD, CD ont des résistances R, R', et pas de self induction (bobines à fils doubles) : les deux branches de gauche AB, AC ont des résistances r, r', et des coefficients de self-induction L, L'. On sait que pour des courants constants (c.à.d. établis) la condition pour qu'il ne passe aucun courant par le galvanomètre (le pont BC) est :

$$\frac{r}{r'} = \frac{R}{R'}.$$

Supposons qu'aucun courant ne passe même pendant la période d'établissement (où les courants sont variables).
Soient I, I' les intensités respectives sur les branches ABD, ACD. Écrivons les équations en tenant compte des self-inductions:

(ABC) $$Ir - I'r' - \mathcal{L}\frac{dI}{dt} + \mathcal{L}'\frac{dI'}{dt} = 0.$$

(BCD) $$IR - I'R' = 0.$$

Pour que ces 2 équations soient compatibles avec la première, il faut qu'on ait: $$\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}'} = \frac{R}{R'}.$$

Cela posé, voici comment on procède. On règle le pont de manière qu'il y ait équilibre pour les courants permanents: on a alors: $$\frac{r}{r'} = \frac{R}{R'}.$$

En général, il n'y a pas en même temps équilibre pour l'établissement des courants; au moyen de 2 rhéostats interposés sur les branches AB, BD, on modifie le coefficient $\mathcal{L}$ en maintenant r et R proportionnels, jusqu'à ce que l'aiguille du galvanomètre ne bouge plus ~~de tout~~ quand on ferme le circuit. Les 3 équations étant vérifiées alors simultanément, on a la proportion:

$$\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}'} = \frac{R}{R'}$$

et comme on connaît les résistances R, R', on mesure par là le rapport de $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$.

On peut comparer, par une méthode analogue, les coefficients d'induction réciproque, soit entre eux, soit avec ceux de self-induction.

25e leçon

Problème de la décharge d'un condensateur

Soit un condensateur de capacité C, dont on réunit les armatures par un conducteur de résistance R, dont le coefficient de self-induction est L. Pour une différence de potentiel E entre les 2 plateaux, la charge est :

$$Q = CE$$

Soit I l'intensité du courant variable qui traverse le conducteur dans le temps dt ; il transporte la quantité d'électricité Idt, la charge diminue d'autant :

$$-dQ = Idt \qquad I = -\frac{dQ}{dt}$$

D'autre part, appliquons la loi d'Ohm à ce courant :

$$RI = E - L\frac{dI}{dt} \qquad \text{Or :} \quad E = \frac{Q}{C}, \quad I = -\frac{dQ}{dt} :$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0,$$

ou :

$$LC\frac{d^2Q}{dt^2} + RC\frac{dQ}{dt} + Q = 0,$$

équation linéaire du 2e ordre, dont l'intégrale est :

$$Q = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t},$$

α et β étant les racines de l'équation caractéristique :

$$LCx^2 + RCx + 1 = 0.$$

Ces racines peuvent être réelles ou imaginaires, suivant que :

$$R^2C^2 - 4LC > \text{ ou } < 0,$$

c. à d. :

$$R^2 > \text{ ou } < 4\frac{L}{C}.$$

D'autre part, l'équation de I est la suivante :

$\left(I = -\frac{dQ}{dt}\right) \qquad I = -A\alpha e^{-\alpha t} - B\beta e^{-\beta t}$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initials: $Q = Q_0$, $I = 0$. (pour $t=0$)

or: $Q_0 = E_0 C$ donc: $A + B = Q_0 = E_0 C$.

25e leçon

Quand les racines α, β sont réelles elles sont négatives: donc Q et I tendent rapidement vers 0, suivant les courbes figurées ci-contre:

Q

I

Quand les racines sont imaginaires, les constantes A et B doivent aussi avoir des valeurs imaginaires (conjuguées).

La partie imaginaire des exponentielles donne une fonction trigonométrique périodique réelle. En effet, sol[?] :

$$\left.\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\right\} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L} = \frac{-R \pm i\sqrt{4\frac{L}{C} - R^2}}{2L}$$

$\left(4\frac{L}{C} - R^2 > 0\right)$ posons: $\frac{\sqrt{4\frac{L}{C} - R^2}}{2L} = K$.

il vient:

$$Q = A e^{-\frac{R}{2L}t} . \sin(Kt - \varphi)$$

Les 2 constantes de intégration A et φ sont déterminées par les conditions initiales: $Q_0 = -A \sin\varphi$

$$\left(I = -\frac{dQ}{dt}\right) \qquad I = \begin{cases} -Ae^{-\frac{R}{2L}t} . K\cos(Kt - \varphi) \\ +A\frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin(Kt - \varphi) \end{cases}$$

Donc: $I_0 = 0 = -AK\cos\varphi - \frac{AR}{2L}\sin\varphi$

d'où l'on tire : $\quad tg\varphi = -\frac{2KL}{R}$

$$\sin\varphi = \frac{-2KL}{\sqrt{R^2+4K^2L^2}} \qquad Q_0 = \frac{2AKL}{\sqrt{R^2+4K^2L^2}}$$

d'où l'on tire la valeur de la constante A.

La loi de variation de Q montre que la charge oscille (comme le sinus) en diminuant de plus en plus (comme l'exponentielle). C'est la décharge oscillante, découverte par Feddersen bien avant qu'on en trouvât l'équation. Il avait remarqué qu'une feuille de papier passant très vite entre les 2 pôles d'un condensateur qu'on décharge était percée d'une série de petits trous, qui indiquaient autant d'étincelles ; et il admit que ces décharges successives, pour être discontinues, devaient être de sens contraire alternativement.

On voit qu'on peut obtenir, soit la décharge continue, soit la décharge oscillante, suivant que R^2 est plus grand ou plus petit que $\frac{4L}{C}$. Par exemple, on peut faire varier à volonté la résistance du conducteur. Si cette résistance est nulle (ou pratiquement très faible), la décharge sera nécessairement oscillante.

Les oscillations électriques dans une telle décharge sont

très courtes ($\frac{1}{100.000}$ ou $\frac{1}{1.000.000}$ de seconde) La décharge totale elle-même dure à peine $\frac{1}{10.000}$ de seconde (bien que théoriquement elle dure un temps infini) Les oscillations prouvent ce fait important, que la propagation de l'induction n'est pas instantanée.

Jusqu'ici nous avons traité de l'induction par variation d'intensité dans des circuits fixes; nous allons étudier maintenant l'induction par le mouvement.

Problème. Soit un cadre de surface S mobile autour d'un axe vertical dans le champ magnétique terrestre. On sait que la force électromotrice induite change de signe à chaque demi-tour (p. 259) Nous avons calculé la quantité d'électricité produite par demi-tour, mais non l'intensité du courant induit, parce qu'il faut tenir compte de la self-induction.

La force électromotrice induite $E = -\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, $\mathcal{F}$ étant le flux de force qui traverse le circuit. La loi d'Ohm donne l'équation :

$$RI = -L\frac{dI}{dt} - \frac{d\mathcal{F}}{dt}$$

Supposons qu'à l'origine des temps le cadre soit perpendiculaire au méridien magnétique, et qu'il tourne avec la vitesse angulaire uniforme ω. Au bout du temps t, il aura décrit l'angle ωt. Or, dans sa position initiale $\mathcal{F} = SH$, H étant la composante horizontale du

magnétisme terrestre. A l'époque t, on aura :

$$\mathcal{F} = SH \cos \omega t$$

d'où : $\dfrac{d\mathcal{F}}{dt} = - SH\omega \sin \omega t$

L'équation devient donc :

$$L_1 \frac{dI}{dt} + RI = SH\omega \sin \omega t$$

équation linéaire dont le 2e membre est fonction du temps. La solution complète se compose d'une partie périodique et d'une partie non périodique. Celle-ci est négligeable parce que les exponentielles décroissent très rapidement et deviennent sensiblement nulles après quelques tours, quand le régime est établi. En conservant seulement la partie périodique on a une intégrale :

$$I = A \sin(\omega t - \varphi)$$

Il est facile de vérifier que c'est une solution de l'équation différentielle : $\dfrac{dI}{dt} = A\omega \cos(\omega t - \varphi)$

$$L_1 A\omega \cos(\omega t - \varphi) + AR \sin(\omega t - \varphi) = SH\omega \sin \omega t$$

$$(L_1 A\omega \cos\varphi - AR \sin\varphi) \cos \omega t$$
$$+ (L_1 A\omega \sin\varphi + AR \cos\varphi - SH\omega) \sin \omega t = 0.$$

Pour que cette équation soit vérifiée quel que soit t, il suffit que les 2 coefficients soient nuls. On a ainsi 2 équations qui déterminent les constantes A et φ :

$$L_1 A\omega \cos\varphi = AR \sin\varphi \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{L_1\omega}{R}.$$
$$L_1 A\omega \sin\varphi + AR \cos\varphi = SH\omega$$

Remplaçons $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par leurs valeurs connues:

$$\frac{AL_o^2\omega^2 + AR^2}{\sqrt{L_o^2\omega^2+R^2}} = SH\omega \qquad A = \frac{SH\omega}{\sqrt{R^2+L_o^2\omega^2}}$$

On a définitivement:

$$I = \frac{SH\omega}{\sqrt{R^2+L_o^2\omega^2}}\sin(\omega t-\varphi)$$

Cette formule est très remarquable: le numérateur est la force électromotrice $SH\omega\sin\omega t$, décalée de l'angle φ: c.à.d. que le zéro de intensité suit le zéro de force électromotrice à un intervalle constant: $(\omega t=\varphi,)$ $t=\frac{\varphi}{\omega}$. La durée d'une période (correspondant à un tour entier) est: $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

Le décalage φ est d'autant plus grand que $L_o\omega$ est plus grand par rapport à R.

D'autre part, au lieu de la résistance R du circuit, nous avons en dénominateur la quantité plus grande $\sqrt{R^2+L_o^2\omega^2}$, qu'on appelle l'impédance, puisqu'elle empêche le courant de s'établir et diminue son intensité. Le terme additif $L_o^2\omega^2$, par lequel l'impédance surpasse la résistance, s'appelle l'inductance, parce qu'il provient de la self-induction L_o.

Si l'on avait $L=0$, on aurait à la fois : $\varphi = 0$,
et : $\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = R$.

Ainsi la self-induction a un double effet : le décalage et la diminution d'intensité équivalant à un accroissement de résistance : la résistance apparente est l'impédance. — Dans l'autre cas-limite, où $R = 0$, on trouve : $tg\,\varphi = \infty$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Le décalage maximum est donc d'un quart de tour : dans ce cas extrême, l'intensité est maxima (en valeur absolue) au moment où la force électromotrice est nulle. La formule de l'intensité devient (1)

$$I = -\frac{SH}{L}\cos\omega t$$

On voit que, dans ce cas particulier, la valeur maxima de I : $\frac{SH}{L}$, est indépendante de la vitesse de rotation ω. Cette solution s'applique approximativement aux cas où l'inductance est très grande par rapport à la résistance.

L'instrument théorique que nous venons d'étudier est le type de tous les alternateurs (machines produisant des courants alternatifs) employés dans l'industrie ; c'est ce qui fait l'importance pratique de la formule sinusoïdale de l'intensité, qui s'applique dans une foule de cas.

(1) On arriverait directement à la même équation en faisant $R = 0$: $L\frac{dI}{dt} = SH\omega\sin\omega t$; d'où : $L.I = -SH\cos\omega t$

Nous allons la retrouver en traitant un problème tout différent en apparence.

Problème. Soit une bobine infiniment longue au milieu de laquelle on fait tourner un petit aimant AB (v. p. 224). Soit m la charge de ses pôles, l sa longueur. Si la bobine est parcourue par un courant d'intensité I, l'intensité du champ magnétique à son intérieur est : $4n\pi I$, et par suite la force qui s'exerce sur chaque pôle de l'aimant est :

$$4mn\pi I.$$

D'autre part, soit ωt l'angle que fait l'aimant avec sa position initiale (perpendiculaire à la force) ; pendant un temps inf. petit dt, il subit un déplacement élémentaire :

$$\frac{l}{2}\,d(\cos\omega t) = -\frac{l}{2}\,\omega \sin\omega t.dt$$

Le travail accompli par la force magnétique sur les 2 pôles est :

$$d\mathcal{E} = -4mn\pi I.\,l\omega\sin\omega t.dt = -4n\pi I.\,M\omega\sin\omega t.dt$$

($M = ml$). Or la force électromotrice induite est (p. 286) :

$$E_1 = -\frac{1}{I}\frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

donc :

$$E_1 = 4n\pi M\omega\sin\omega t$$

L'équation du courant induit est par conséquent :

$$RI = -L\frac{dI}{dt} + 4n\pi M\omega\sin\omega t$$

équation de même forme que celle du problème précédent (SH est remplacé par $4n\pi M$) ; la solution est donc :

$$I = \frac{4n\pi M\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\sin(\omega t - \varphi)$$

Au moyen de ces formules on peut évaluer en unités électromagnétiques une force électromotrice ou une résistance ~~sans avoir~~ besoin du calorimètre (v. p. 233)

Soit par exemple à mesurer en valeur absolue une force électromotrice constante. On la met en communication en série avec un cadre qui tourne ~~dans un p~~ autour d'un axe vertical, de telle sorte que le circuit ne soit fermé qu'au moment où la force électromotrice induite dans le cadre a sa valeur maxima : $SH\omega$. On règle la vitesse de rotation du cadre de telle sorte qu'un galvanomètre placé dans le circuit ne dévie pas au moment où il se ferme : les deux forces électromotrices sont égales et de sens contraire. On ~~mesure~~ a ainsi la valeur de la force électromotrice à mesurer, sans avoir à tenir compte de la self-induction, puisque le courant est nul.

Cet instrument ne serait pas pratique pour des forces électromotrices ordinaires (celle d'une pile, par ex.), parce que le magnétisme terrestre étant très faible il faudrait donner une trop grande vitesse au cadre. Mais on peut faire passer le courant de la pile dans une résistance R infiniment grande par rapport à celle de la pile elle-même, de telle sorte que la différence de potentiel aux 2 extrémités de la résistance soit égale à la force électromotrice E de la pile. En établissant un circuit

dérivé sur une portion r de la résistance R, on aura dans cette branche une force électromotrice $e = E \frac{r}{R}$, qu'il on pourra mesurer par la méthode précédente. Connaissant le rapport $\frac{r}{R}$, on pourra calculer E.

Si l'on se propose au contraire de mesurer la résistance inconnue R du circuit, on intercalera dans le circuit une boussole des tangentes qui mesure l'intensité I en valeur absolue; on mesurera d'autre part la force électromotrice E, comme ci-dessus, en l'opposant dans une dérivation à la force électromotrice induite dans un cadre tournant; on en déduira : $R = \frac{E}{I}$.

On remarquera que H disparaît de l'expression de R. En effet, on a d'une part: $E = SH\omega$, et d'autre part : $I = AH\,tg\,\theta$ (p. 221.)

Il reste simplement: $R = \frac{S\omega}{A\,tg\,\theta}$.

Ainsi la mesure absolue des résistances est indépendante de l'intensité du magnétisme terrestre.

C'est par une méthode analogue, fondée sur l'induction, qu'on a obtenu les mesures les plus exactes de l'ohm. Les méthodes calorimétriques sont moins précises.

Nous allons donner un autre exemple d'une méthode de mesure des résistances fondée sur l'induction.

Considérons 2 bobines dont le coefficient d'induction réciproque

M est connu. Soit I le courant lancé dans l'un, R sa résistance; la quantité d'électricité qui passe dans l'autre en vertu de l'induction est (p. 264):

$$Q = \pm \frac{MI}{R}.$$

On mesure Q et I, et l'on en déduit R.

On peut mesurer Q de deux manières: soit en faisant passer le courant induit dans un galvanomètre balistique (p. 269), soit en employant comme interrupteur un diapason et en s'arrangeant pour qu'il ne fasse passer que le courant induit direct (ou inverse) par le galvanomètre; ou encore en employant un commutateur qui renverse les communications avec le galvanomètre chaque fois que le courant induit change de sens. Soit $\underline{n}$ le nombre de décharges par seconde; θ la déviation du galvanomètre: tg θ sera proportionnelle à $nQ = \frac{nMI}{R}$.

Si d'autre part on fait passer le courant d'intensité I dans le galvanomètre, et si θ' est la déviation correspondante, tg θ' sera proportionnelle à I. On a donc:

$$\frac{tg\,\theta}{tg\,\theta'} = \frac{nM}{R}.$$

d'où l'on tire la valeur de R.

Nous n'avons jusqu'ici étudié les courants induits que dans des fils conducteurs. Mais ils peuvent se produire dans des masses métalliques de forme quelconque, comme le prouve

La roue de Barlow (p. 273.) Voici une variante de la même expérience : Entre les 2 pôles d'un fort électro-aimant on suspend un cube de cuivre à un fil, qu'on tord et qu'on abandonne ensuite à lui-même : le cube se met à tourner rapidement ; dès qu'on fait passer le courant dans l'électro-aimant, il s'arrête brusquement. Ainsi les courants induits de forme quelconque obéissent à la loi de Lenz : ils s'opposent au déplacement qui les produit.

— Quand un fil cylindrique est traversé par des courants alternatifs, la distribution du courant ne peut être homogène à cause de la self-induction (v. p. 267.)

En effet, si l'on calcule le coefficient de self-induction :

$$L = \iint \frac{ds\,ds' \cos\omega}{r},$$

l'élément différentiel est d'autant plus grand que r est plus petit, c à d. que les éléments linéaires ds, ds' sont plus voisins. Or il y a 2 fois plus d'éléments de courant dans le voisinage d'un élément linéaire intérieur, sur l'axe notamment, que dans le voisinage d'un élément superficiel, suivant une génératrice du cylindre. Donc l'induction doit être plus forte dans l'axe du fil qu'à sa surface et comme elle s'oppose à l'établissement du courant, le courant doit être plus intense à la surface

qu'à l'intérieur. Cet effet doit être d'autant plus marqué que l'alternance est plus fréquente. Par exemple, la décharge d'un condensateur, dont les oscillations sont beaucoup plus rapides que celles d'un courant alternatif, doit suivre uniquement la surface des conducteurs. En général, les oscillations électriques sont localisées à la surface des conducteurs.

26e leçon.

L'influence du milieu se fait sentir dans l'induction magnétique comme dans l'induction électrique. Il faut donc étudier les propriétés spécifiques des corps à l'égard du magnétisme.

Jusqu'ici nous avons admis l'aimantation comme un fait donné, et supposé qu'on n'avait que des aimants naturels. Or l'expérience montre que les aimants naturels attirent le fer comme les corps électrisés attirent les corps électrisés, c.à.d. par influence. Nous allons étudier l'aimantation par influence.

A | b a | B

Une parcelle de fer ou un petit barreau placé dans un champ magnétique s'aimante dans la direction des lignes de force, le pôle boréal étant du côté où elles entrent et le pôle austral du côté où elles sortent. Si le barreau est entre les pôles d'un aimant,

(de telle sorte qu'ils s'attirent.)
il présente à chaque pôle un pôle de nom contraire)
Pendant longtemps on ne connut que le fer et l'acier qui pussent s'aimanter par influence; puis on découvrit que le nickel et le cobalt possèdent la même propriété magnétique.

En suspendant entre les pôles d'un fort électro-aimant des barreaux de différentes matières, Faraday reconnut que la propriété magnétique appartient aux dissolutions des sels de fer, de nickel et de cobalt, et même à certains gaz comme l'oxygène. On ~~les~~ constate en effet que l'électro-aimant attire leurs pôles de manière à empêcher ou à raccourcir leurs oscillations, en un mot exerce une action directrice sur les barreaux. Exemple: un barreau de paraffine plongé dans la limaille de fer, puis essuyé, subit encore l'action directrice à cause des parcelles de fer restées adhérentes.

On constate au contraire que des barreaux de certains corps se placent transversalement par rapport aux lignes de force (ex: le bismuth.) On les appelle <u>diamagnétiques</u>, tandis que les premiers s'appellent <u>magnétiques</u> ou <u>paramagnétiques</u>.

Pour expliquer la propriété des diamagnétiques on suppose que l'aimantation par influence ~~développe en~~ est chez eux inverse de ce qu'elle est chez les corps magnétiques c.à.d. qu'elle développe en face de chaque pôle de l'aimant inducteur un pôle de même nom:

les pôles induits étant repoussés par les pôles inducteurs tendent à s'éloigner le plus possible, et c'est pourquoi les barreaux diamagnétiques se mettent en travers du champ.

Il n'y a pas de corps fortement diamagnétique. Le plus diamagnétique de tous, le bismuth, a un coefficient de aimantation qui est $\frac{1}{2.000.000}$ de celui du fer, le plus magnétique de tous les corps.

Aussi, quand on a découvert les corps diamagnétiques, s'est-on demandé si leur aimantation inverse n'était pas une illusion, produite par une différence d'aimantation directe. Par exemple, si l'air est magnétique, il doit être attiré par les pôles de l'aimant inducteur, et par suite il pourrait repousser des lignes de force les corps moins magnétiques que lui. Mais on constate que les corps diamagnétiques le sont même dans le vide, de sorte que, pour ne pas admettre la propriété diamagnétique comme irréductible, il faudrait supposer que le vide a un pouvoir paramagnétique sensible; les corps dits diamagnétiques seraient moins paramagnétiques que le vide. Cette hypothèse n'est pas absurde, mais improbable.

Le problème général de l'aimantation par influence est celui-ci: Étant donné le champ magnétique où un corps est placé, déterminer son aimantation. Ce problème a

été étudié théoriquement par Poisson et d'autres mathématiciens. On peut aussi le traiter par l'expérience. On trouve une relation très simple pour les corps faiblement magnétiques : leurs propriétés sont caractérisées par un coefficient d'aimantation constant : en effet, leur intensité d'aimantation est simplement proportionnelle à l'intensité du champ inducteur.

Soit H l'intensité du champ, J l'intensité d'aimantation d'un élément de volume dv, son moment magnétique est

$M = J dv$ Or : $J = kH$

donc : $M = kH.dv$

k est le coefficient d'aimantation du corps ; si l'on mesure le moment magnétique M, on en déduira k.

Donnons au corps étudié la forme d'un petit barreau de longueur dl et de section ds, et suspendons-le dans un champ d'intensité variable dont on connaît les lignes de force.

La force magnétique sur un pôle étant F, elle sera sur l'autre :

$$F + \frac{\partial F}{\partial l} dl$$

Soient $+m$, $-m$ les masses magnétiques des 2 pôles, la force résultante sera :

$$- m \frac{\partial F}{\partial l} dl$$

Or le moment magnétique est, d'une part : $M = ml$,

et d'autre part : $M = J dv = J dl.ds$

Donc : $m = J ds$

et la force est : $- J \frac{\partial F}{\partial l} dl.ds = - J \frac{\partial F}{\partial l} dv$.

On mesure la force qui s'exerce sur le petit barreau dont on connaît le volume $d\tau$, et l'on en déduit la valeur de $\mathfrak{I}$; on trouve que: $\mathfrak{I} = kF$.

Cela n'est vrai que pour les corps très peu magnétiques, car, dès qu'un corps est notablement magnétique, sa propre aimantation modifie le champ, ce qui complique beaucoup le problème.

On a considéré un aimant comme un ~~faisceau~~ paquet de petits aimants, en supposant que le moment magnétique d'un élément de volume $dx\,dy\,dz$ est:

$$dM = I\,dx\,dy\,dz$$

I étant l'intensité (variable) de l'aimantation en ce point. Le potentiel en un point extérieur A est (p. 194):

$$V = \iiint \frac{I\,dx\,dy\,dz}{r^2} \cos\varepsilon$$

r étant la distance du point A à l'élément $dx\,dy\,dz$, et ε l'angle du rayon vecteur avec la direction de l'aimantation. La force magnétique en ce point a pour composantes:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Il ne suffit pas de déterminer la force en un point extérieur; il faut encore l'évaluer pour les points intérieurs (comme la force électrique, qu'on a trouvée nulle à l'intérieur des conducteurs) pour savoir comment l'aimantation se distribue dans un corps placé dans un champ magnétique. Mais cela

est beaucoup plus difficile pour la force magnétique que pour la force électrique. En effet, pour évaluer la force électrique en un point intérieur, on supprimait la charge électrique de l'élément de volume environnant, et sans changer le potentiel ni ses dérivées en ce point. Au contraire, si l'on creuse une petite cavité dans un corps magnétique, la force en un point intérieur de cette cavité est indéterminée, car elle dépend de la forme de la cavité, à la surface de laquelle se produit une distribution magnétique.

Nous allons déterminer la valeur de la force magnétique en un point intérieur en donnant deux formes particulières à la cavité infiniment petite qui entoure ce point P.

1° Supposons que la cavité soit un cylindre dont l'axe est dirigé dans le sens de l'aimantation, et dont les dimensions transversales sont infiniment petites par rapport à sa longueur (infiniment petite elle-même.) La force qui s'exerce sur le point P provient d'abord du potentiel de la masse magnétique extérieure sur ce point, et elle est dirigée suivant l'axe du cylindre.

A cette force s'ajoute la force exercée par les 2 bases a et b de la cavité, qui sont des pôles magnétiques (l'action

de la surface latérale est nulle) Cette force est: Ids.
Or ds étant infiniment petite par rapport à la longueur de la cavité, cette force complémentaire n'ajoute rien à l'autre; la force totale est donc égale à celle-ci: c'est par définition la force magnétique du point P.

2° Supposons que la cavité soit un cylindre ayant toujours pour axe la direction de l'aimantation, mais

infiniment aplati, c.à.d. dont la longueur est infiniment petite par rapport aux dimensions transversales.
Les 2 bases du cylindre constituent deux pôles, boréal et austral, de sorte que le point P est ~~constitué~~ comme entre les 2 plateaux d'un condensateur.
La force que ces 2 pôles ensemble exercent ~~sur~~ le point P est dans le même sens que la force du champ. On sait que entre 2 plateaux de condensateur de densité électrique μ, la force est $4\pi\mu$ (p.   ); entre 2 ~~plateaux~~ feuillets magnétiques de densité magnétique I, elle doit être: $4\pi I$. La force totale est donc:

$$F'' = F + 4\pi I.$$

La force F'' est appelée induction magnétique.
En donnant à la cavité des formes différentes & déterminées, on obtiendrait pour la force en P des valeurs différentes de F et de F''.

On va justifier les noms donnés aux forces F et F'.

Si l'on comble la 1e cavité avec de la matière magnétique neutre, elle s'aimantera sous l'influence de la force magnétique F, de manière à combler le vide pratiqué dans l'aimant. Son intensité d'aimantation sera : $I = kF$.

Cette force F provient à la fois du champ extérieur et de l'aimantation du corps. Elle peut être toute différente de celle qu'~~exp~~ exercerait au même point P ~~s~~ le même champ si le corps n'existait pas.

On a entre F et F' la relation :

$$F' = F + 4\pi I = F + 4\pi k F = F(1 + 4\pi k)$$

L'expérience montre que $(1 + 4\pi k)$ est égal au coefficient de perméabilité magnétique μ ; on a donc :

$$F' = \mu F.$$

Le nom d'induction magnétique donné à la force F' provient de ce que le flux de force, qui produit tous les phénomènes d'induction, est proportionnel au nombre μ.

Théorème. Étant donné un corps magnétique aimanté ~~par influence~~ dans un champ magnétique, on peut toujours lui substituer une double distribution de pôles magnétiques, l'une de densité solide ρ, l'autre de densité superficielle σ, de telle sorte que le potentiel et la force en un point intérieur quelconque restent les mêmes.

Le corps étant rapporté à 3 axes rectangulaires, soient ξ, η, ζ les coordonnées (fixes) du point P où l'on veut évaluer le potentiel, x, y, z les coordonnées (variables) d'un point M du corps ; soit r la distance MP, et ε l'angle qu'elle fait avec la direction de l'aimantation en M ; soient α, β, γ et α', β', γ' les angles que font respectivem^t avec les 3 axes la direction de l'aimantation en M et la direction MP : on a la relation :

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$

Evaluons séparément ces 6 angles. Soient A, B, C les 3 composantes de l'intensité d'aimantation I suivant les 3 axes : on a :

$$A = I\cos\alpha \qquad B = I\cos\beta \qquad C = I\cos\gamma$$

D'autre part, les projections de MP sur les 3 axes sont :

$$\xi - x = r\cos\alpha' \qquad \eta - y = r\cos\beta' \qquad \zeta - z = r\cos\gamma'$$

Substituons dans l'expression de $\cos\varepsilon$:

$$\cos\varepsilon = \frac{1}{Ir}\left[A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z)\right]$$

Portons cette expression dans la formule du potentiel (p. 315) :

$$V = \iiint \frac{A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z)}{r^3}\, dx\, dy\, dz$$

Cette intégrale est la somme de 3 autres de la forme :

$$\iiint \frac{A(\xi - x)}{r^3}\, dx\, dy\, dz$$

Or : $\dfrac{\xi - x}{r^3} = -\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{r}\right)$. Intégrons par parties :

$$-\iiint \frac{A\,d}{dx}\left(-\frac{1}{r}\right) dx\,dy\,dz = \iint \frac{A}{r}\, dy\,dz - \iiint \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial A}{\partial x}\, dx\,dy\,dz$$

De même pour les 2 autres intégrales. Nous allons transformer les intégrales doubles. Considérons l'élément dS de la surface du corps, et soient l, m, n les cosinus des angles que la normale à cet élément fait avec les 3 axes. Les projections de l'élément dS sur les 3 plans sont :

$$dy\,dz = l\,dS \qquad dz\,dx = m\,dS \qquad dx\,dy = n\,dS.$$

Réunissons les 3 intégrales doubles et les 3 intégrales triples :

$$V = \iint \frac{Al + Bm + Cn}{r}\, dS - \iiint \frac{\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}}{r}\, dx\,dy\,dz$$

Ces 2 intégrales sont susceptibles d'une interprétation simple. Supposons que sur la surface du corps soient distribués des pôles magnétiques dont la densité superficielle soit :

$$\sigma = Al + Bm + Cn$$

cette distribution fournira le 1er terme du potentiel.

Supposons que dans le volume du corps soient distribués des pôles magnétiques dont la densité solide soit ;

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)$$

cette distribution fournira le 2e terme du potentiel.

Ainsi l'on peut remplacer l'aimantation réelle du corps ayant l'intensité I en chaque point, par une distribution de masses magnétiques de densité superficielle σ et de densité

solide ρ. — Dans le cas particulier où l'aimantation est solénoïdale, le corps aimanté peut se décomposer en solénoïdes, tous réductibles à 2 pôles situés à leurs extrémités, c. à d. sur la surface du corps. Dans ce cas, l'aimantation du corps équivaut à une simple distribution superficielle de pôles; la densité solide est nulle. Donc l'équation qui caractérise l'aimantation solénoïdale est:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 .$$

(appelée équation solénoïdale.)

Or l'aimantation par influence est toujours solénoïdale. En effet, on a la relation:

$$I = kF,$$

d'où:

$$A = kX, \quad B = kY, \quad C = kZ.$$

ou:

$$A = -k\frac{\partial V}{\partial x}, \quad B = -k\frac{\partial V}{\partial y}, \quad C = -k\frac{\partial V}{\partial z}.$$

La densité solide est donc:

$$\rho = -k\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = -k\,\Delta V.$$

Or on sait que (p. 69):

$$\Delta V = 4\pi\rho.$$

Donc on a:

$$\rho = -4\pi k\rho$$

et comme $k \gtrless 0$, il faut que: $\rho = 0$, c. q. f. d.

Ainsi un corps aimanté par influence équivaut à un faisceau de solénoïdes: les pôles positifs ~~sont~~ d'un côté, les pôles négatifs de l'autre, séparés par une zone neutre. Ces pôles agissent en sens inverse du champ magnétique sur les points situés à l'intérieur du corps. En effet, la force du

champ pousse une masse magnétique positive vers le pôle A, tandis que ce pôle austral la repousse et que le pôle boréal B l'attire. C'est

un phénomène analogue à celui qui a lieu dans les corps conducteurs, où les 2 actions s'annulent exactement.
Dans les corps faiblement magnétiques, l'action des pôles développés par influence est négligeable; et c'est pourquoi l'aimantation induite est proportionnelle à l'intensité du champ. Dans les corps fortement magnétiques au contraire, l'action démagnétisante des pôles s'oppose à l'aimantation induite, ce qui complique le phénomène. Par suite, pour obtenir des aimants puissants, il faut autant que possible éloigner les pôles: c'est pourquoi l'on donne aux aimants la forme de barreaux longs. Un tore aimanté suivant son axe circulaire n'a pas de pôle superficiel, donc pas d'action démagnétisante; son aimantation est par suite maxima. Il est vrai qu'il n'a aucune action au dehors. Mais on peut obtenir cette action en coupant le tore en deux; on a ~~du moins~~ ainsi conservé son aimantation jusqu'au moment où l'on veut l'employer.

Table des matières.

